

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №4, часть 1

И. Щуров, А. Трофимова

Фамилия и имя студента: Луценко Александр Александрович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число). Просрочка более, чем на сутки, приводит к обнулению работы.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

## Задачи

**Задача 1.** Пусть  $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим систему  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$  (если такие есть), при которых особая точка  $(0, 0, 0)$  является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра  $\alpha$  нет, объяснить, почему.

**Warning:** при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

**Задача 2.** Рассмотрим систему, зависящую от параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -11\varepsilon x + 10\varepsilon y + 6y^5 \\ \dot{y} = -25\varepsilon x + 19\varepsilon y - 4x^3 \end{cases}$$

При каких значениях  $\varepsilon$  особая точка  $(0, 0)$  является асимптотически устойчивой? Устойчивой по Ляпунову? Не является устойчивой? Исследовать все возможные значения  $\varepsilon$  (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению не даёт ответа).

**Задача 3.** Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :

$$\dot{x} = \varepsilon x - 3\varepsilon + 3x - (x - 3)^3 - 9$$

- При каких значениях параметра  $\varepsilon$  происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях  $\varepsilon$  система не является структурно устойчивой?)
- Как зависит устойчивость особой точки  $x = 3$  от параметра  $\varepsilon$ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
- Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра  $\varepsilon$ ?

**Задача 4.** Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -6x - \alpha\dot{x},$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра  $\alpha$ , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку  $x = 0$ ) бесконечно много раз.

**Задача 5.** Докажите или опровергните следующие утверждения:

- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого ( $C^1$ -близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого ( $C^1$ -близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.

Для простоты будем считать, что исходная система и её возмущения определены только в некоторой фиксированной окрестности рассматриваемой особой точки.

Это не всё! Не забудьте про вторую часть этого домашнего задания!