

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №4, часть 1

И. Щуров, А. Трофимова

Фамилия и имя студента: Зелепукин Серафим Сергеевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число). Просрочка более, чем на сутки, приводит к обнулению работы.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Задача 1. Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0)$ является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

Задача 2. Рассмотрим систему, зависящую от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -25\varepsilon x - 30\varepsilon y + 4y^3 \\ \dot{y} = 12\varepsilon x + 11\varepsilon y - 8x^7 \end{cases}$$

При каких значениях ε особая точка $(0, 0)$ является асимптотически устойчивой? Устойчивой по Ляпунову? Не является устойчивой? Исследовать все возможные значения ε (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению не даёт ответа).

Задача 3. Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = \varepsilon x + 2\varepsilon + 7x - (x + 2)^3 + 14$$

- При каких значениях параметра ε происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ε система не является структурно устойчивой?)
- Как зависит устойчивость особой точки $x = -2$ от параметра ε ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
- Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ε ?

Задача 4. Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -5x - \alpha\dot{x},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра α , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку $x = 0$) бесконечно много раз.

Задача 5. Докажите или опровергните следующие утверждения:

- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого (C^1 -близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого (C^1 -близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.

Для простоты будем считать, что исходная система и её возмущения определены только в некоторой фиксированной окрестности рассматриваемой особой точки.

Это не всё! Не забудьте про вторую часть этого домашнего задания!