Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №4, часть 1
И. Щуров, А. Трофимова
Фамилия и имя студента: Ельцова Дарья Сергеевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число). Просрочка более, чем на сутки, приводит к обнулению работы.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Задача 1. Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0)$ является

a. асимптотически устойчивой;
b. устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: *при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.*

Задача 2. Рассмотрим систему, зависящую от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -9\varepsilon x + 8\varepsilon y + 4y^3 \\ \dot{y} = -20\varepsilon x + 15\varepsilon y - 4x^3 \end{cases}$$

При каких значениях ε особая точка $(0,0)$ является асимптотически устойчивой? Устойчивой по Ляпунову? Не является устойчивой? Исследовать все возможные значения ε (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению не даёт ответа).

Задача 3. Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = \varepsilon x - 4\varepsilon + 4x - (x-4)^3 - 16$$

a. При каких значениях параметра ε происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ε система не является структурно устойчивой?)
b. Как зависит устойчивость особой точки $x = 4$ от параметра ε? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
c. Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ε?

Задача 4. Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -2x - \alpha\dot{x},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра α, при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку $x = 0$) бесконечно много раз.

Задача 5. Докажите или опровергните следующие утверждения:
a. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого (C^1-близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
b. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого (C^1-близкого) возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.

Для простоты будем считать, что исходная система и её возмущения определены только в некоторой фиксированной окрестности рассматриваемой особой точки.

Это не всё! Не забудьте про вторую часть этого домашнего задания!

 Фамилия и имя студента: Ельцова Дарья Сергеевна