Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020—21 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №3: Линейные уравнения

И. Щуров, Н. Солодовников

Фамилия и имя студента: Новиков Сергей Андреевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Задача 1. (22 балла) Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = -13x + 15y, \quad \dot{y} = -6x + 5y$$

a. Найти какое-нибудь собственное значение и собственный вектор (они должны оказаться комплексными) матрицы системы. Обозначим их через $\lambda = \alpha + i\beta$ и v соответственно.
b. Проверить явно, что $\overline{\lambda}$ является собственным значением той же матрицы с собственным вектором $\overline{v}$.
c. Перейти в базис, составленный из векторов $\operatorname{Re} v$ и $-\operatorname{Im} v$ (здесь $\operatorname{Re} v$ и $\operatorname{Im} v$ — поэлементная вещественная и мнимая части вектора v соответственно; обратите внимание на знак минус!). Для этого необходимо использовать матрицу перехода C, в которой записаны координаты векторов $\operatorname{Re} v$ и $-\operatorname{Im} v$ по столбцам, и сделать замену

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

(аналогично тому, как происходит переход к диагонализирующему базису).

d. Рассмотрим комплексное уравнение
$$\dot{z} = \lambda z, \tag{1}$$
где λ — найденное выше собственное значение. Пусть $z = q+ir$, $q, r \in \mathbb{R}$. Записать систему уравнений на q и r, получающуюся из (1) приравниванием вещественной и мнимой части слева и справа.

e. Сравнить матрицы систем из пунктов d и c.

f. Записать решение $z = z(t)$ уравнения 1 с начальным условием $z(0) = q_0 + ir_0$ в виде комплексной экспоненты.

g. Найти вещественную и мнимую части $q(t)$ и $r(t)$ полученного решения. Записать их в виде вещественных функций от t. Очевидно, получающиеся функции являются решением системы из пункта d.

h. Записать все вещественные решения системы из пункта c.

i. Записать все вещественные решения исходной системы.

j. Показать, что все вещественные решения исходной системы записываются в виде
$$C_1 \operatorname{Re}(ve^{\lambda t}) + C_2 \operatorname{Im}(ve^{\lambda t}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

k. Построить фазовые портреты исходной системы и системы из пункта c. (Можно с помощью компьютерных инструментов, однако нужно понимать, что на итоговой работе компьютерных инструментов под рукой не будет.)

Задача 2. (21 балл) Рассмотрим систему
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a. Является ли матрица системы диагонализируемой? Ответ обосновать.

b. Как выглядит жорданова нормальная форма матрицы?

c. Найти жорданов базис. (В общем виде искать жорданов базис не очень приятно, но в случае размерности 2 это легко: первый вектор является собственным, а в качестве второго можно взять любой вектор, который ему не пропорционален, домножив его на подходящую константу. Действительно, обозначим исходную матрицу через A, её единственное собственное значение через λ, собственный вектор через v. Собственный вектор обязан быть первым базисным вектором жорданова базиса (потому что матрица, записанная в жордановой нормальной форме, переводит первый базисный вектор в пропорциональный себе — проверьте это). Оператор $N = A - \lambda E$ в жордановом базисе имеет матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Заметим, что он переводит любой вектор, не пропорциональный первому базисному вектору, в вектор, пропорциональный ему. Наоборот, любой оператор, обладающий этим свойством, имеет матрицу вида $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где α — какое-то число. Домножением второго базисного вектора на константу можно сделать α равной 1.)

d. Найдите все решения системы (в исходном базисе).

e. Постройте её фазовый портрет в новом и исходном базисе.

Задача 3. (50 баллов) Решить следующие системы дифференциальных уравнений. Найти решение с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Начальное условие считаем вещественным, решение также должно быть вещественным. Нарисовать фазовый портрет (в исходных координатах). Определить тип особой точки $(0, 0)$, если она является невырожденной.

a. $\dot{x} = -11x - 14y, \quad \dot{y} = 7x + 10y$

b. $\dot{x} = -x - 4y, \quad \dot{y} = 6x + 9y$
c. $\dot{x} = 4x - 4y, \quad \dot{y} = 6x - 6y$
d. $\dot{x} = 6x + 10y, \quad \dot{y} = -5x - 8y$
e. $\dot{x} = 4x - y, \quad \dot{y} = 4y$

Задача 4. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(-x^2 - y^2 + 9\right) + 4y \\ \dot{y} = -4x + y\left(-x^2 - y^2 + 9\right) \end{cases}$$

a. (5 баллов) Осуществить переход к полярным координатам (r, φ), то есть сделать замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и найти уравнения на r и φ.
b. (5 баллов) Построить фазовый портрет в координатах (r, φ).
c. (3 балла) Построить фазовый портрет в исходных координатах (x, y).
d. (3 балла) Найти все периодические решения уравнения. Отметить соответствующие фазовые кривые на фазовых портретах.

Задача 5. (20 баллов) Найдите все вещественные решения уравнения (для решения возникающих линейных систем можно использовать компьютерные инструменты — например, библиотеку SymPy).
a. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3t\sin(2t) + 12t\cos(2t) + 13e^{2t} + 11\sin(2t) + 32\cos(2t)$.
b. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 24e^{t} + 10e^{-t}$.

Задача 6. (30 баллов) Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = \sin x + e^{y} - 1, \quad \dot{y} = \sin(x - y). \tag{2}$$

a. (5 баллов) С помощью любого компьютерного инструмента (например, с помощью функции `matplotlib.pyplot.streamplot`) построить её фазовый портрет в области $[-1, 1] \times [-1, 1]$ и в области $[-5, 5] \times [-5, 5]$.
b. (5 баллов) Рассматривая правую часть системы как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, найти его матрицу Якоби в точке $(0, 0)$. Записать линейную систему, задаваемую полученной матрицей. Она называется *линеаризацией* исходной нелинейной системы.
c. (2 балла) Построить фазовые портреты линейной системы в областях $[-1, 1] \times [-1, 1]$ и $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Сравнить с фазовыми портретами нелинейной системы.
d. (15 баллов) Особая точка в начале координат — седло. У линейного седла существуют решения, стремящиеся к седлу в прямом или обратном времени (сепаратрисы). У нелинейного седла также существуют сепаратрисы (но они, вообще говоря, не являются лучами). Найдите с точностью до 4-х знаков после запятой точку пересечения сепаратрисы особой точки $(0, 0)$ исходной системы с прямой $x = 5$. (Иными словами, вам необходимо найти такую точку на прямой $x = 5$, что она стремится к началу координат в прямом или обратном времени.)
e. (3 балла) Найдите особые точки, к которым в обратном времени стремятся траектории, проходящие чуть выше и чуть ниже найденной сепаратрисы.

 Фамилия и имя студента: Новиков Сергей Андреевич