Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 учебный год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №2
Илья Щуров, Анастасия Трофимова
Фамилия и имя студента: Хасанов Тагир Ильгизович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция из некоторой области $U \subset V$ линейного пространства V в множество линейных функционалов на V. Иными словами, говорят, что задана дифференциальная 1-форма, если в каждой точке множества U задан некоторый ковектор.

Определение 2. Рассмотрим дифференциальную 1-форму ω на плоскости. Пусть P — некоторая точка плоскости. Отложим от точки P все возможные векторы v, такие что $\omega|_P(v) = 0$. Если $\omega|_P \neq 0$, все такие векторы для фиксированной точки будут лежать на одной прямой. Получится *поле направлений*, задаваемых уравнением $\omega = 0$.

Задача 1. (3 балла за каждый пункт.)

Для каждой из следующих дифференциальных форм построить поле направлений, которые задаются уравнением $\omega = 0$. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1. Отметить точки, в которых направление не задано.)

a. $\omega = 2\,dx + 4\,dy$
b. $\omega = 2x\,dx + 3y\,dy$

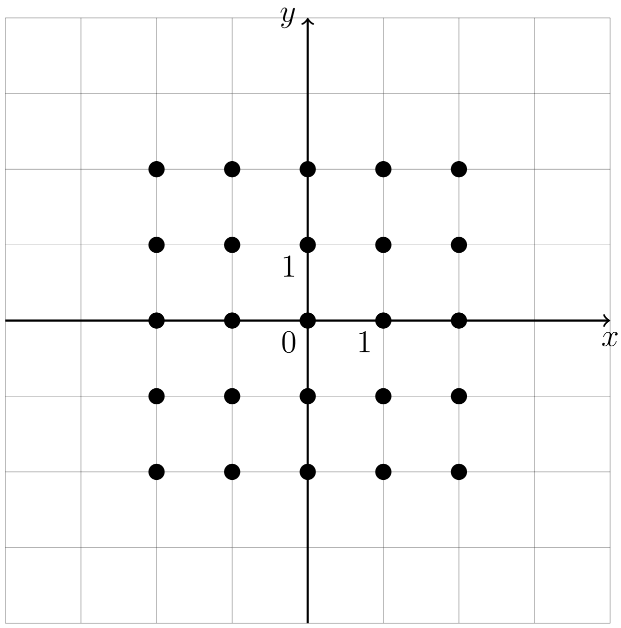

Рис. 1: Рисунок к задачам

c. $\omega = 3y\,dx - 2x\,dy$
d. $\omega = 3y\,dx + 4x\,dy$

Задача 2. (3 балла за каждый пункт.) Для каждого из следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений, которое им задаётся. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1.) Как связаны дифференциальные уравнения с дифференциальными формами из предыдущей задачи?

a. $y' = -\dfrac{1}{2}$ b. $y' = -\dfrac{2x}{3y}$ c. $y' = \dfrac{3y}{2x}$ d. $y' = -\dfrac{3y}{4x}$

Задача 3. (5 баллов) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$

- Найти все решения (зависимость $(x(t),\, y(t))$).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость x от y и/или y от x).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.

Определение 3. Уравнение $y' = F(x, y)$ называется *однородным*, если $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ для любых λ, x, y.

Задача 4. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 + x^2y + 2xy^2 + 6y^3}{x^3 + 2x^2y + 6xy^2} \tag{1}$$

a. (3 балла) Показать, что уравнение является однородным.
b. (3 балла) Нарисовать три различные изоклины для уравнения (1). (Подсказка: как *в принципе* могут выглядеть изоклины однородного уравнения?)
c. (3 балла) Рассмотрим замену $z = y/x$. В какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте b, в координатах (z, x)? Нарисуйте их.
d. (4 балла) Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию z.
e. (5 баллов) Решите уравнение (1). (Не требуется находить решение в виде явной функции $y = y(x)$, достаточно неявного задания.)

Замечание 4. Аналогичным образом (с помощью замены $z = y/x$) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 5. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. (6 баллов)
$$y' = \frac{x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 6y^3}{2x^3 - 2x^2y - 6xy^2}$$
b. (6 баллов)
$$\begin{cases} \dot{x} = -12y \sin\left(x^3 + 6y^2\right) \cos(x) \\ \dot{y} = 3x^2 \sin\left(x^3 + 6y^2\right) \cos(x) + \sin(x) \cos\left(x^3 + 6y^2\right) \end{cases}$$
c. (6 баллов)
$$-dx\left(x^3 - 5x^2y - 6xy^2 + 12y^3\right) + dy\left(-5x^3 - 6x^2y + 12xy^2\right) = 0$$
d. (6 баллов)
$$y' = \frac{-5x^4 \cos(x) \cos\left(x^5 + 7y^5\right) + \sin(x) \sin\left(x^5 + 7y^5\right)}{35y^4 \cos(x) \cos\left(x^5 + 7y^5\right)}$$
e. (6 баллов)
$$y' = y\left(8x^3 + e^x\right) + \left(-9x^2 + e^x\right) e^{2x^4 + e^x}$$

Задача 6. Рассмотрим следующую модель: на плоскости есть несколько точечных массивных тел, положения которых фиксированы («планеты»), а также одно подвижное тело («спутник»). На спутник действуют силы притяжения каждой из планет, определяемые по закону всемирного тяготения:
$$F = \frac{GmM}{r^2},$$
где G — гравитационная постоянная, m и M — массы взаимодействующих тел, r — расстояние между ними.

На любом языке программирования написать программу, находящую координаты спутника в произвольный момент времени по его начальным координатам и скорости и с помощью этой программы выполнить следующие пункты.

a. (10 баллов) Пусть центр Земли находится в начале координат, спутник запускается с поверхности Земли в направлении, перпендикулярном радиусу, с начальной скоростью v_0. Никаких других планет нет. Нарисовать траектории движения спутника (на плоскости) для $v_0 = 5, 9, 12$ км/с за 10000 секунд движения. Считать массу земли сосредоточенной в её центре. Столкновением спутника с поверхностью земли пренебречь.
Подсказка: произведение массы Земли на гравитационную постоянную можно легко найти: оно называется *гравитационным параметром*.

b. (10 баллов) С помощью программы, найти первую космическую скорость (в км/с), то есть такую скорость, при которой спутник выходит на круговую орбиту вокруг Земли. Сравнить с реальным значением первой космической скорости.
c. (10 баллов) Пусть две планеты массой, равной массе Земли, расположены таким образом, что расстояние между их центрами составляет 40000 км. Ровно посередине между ними находится спутник. Начальная скорость спутника направлена под углом в 45 градусов к прямой, соединяющей центры планет. Положение планет фиксированно и не меняется со временем. Взять все начальные скорости от 1 до 5 км/с с шагом в 0.5 км/с и для каждой построить траекторию за первые 20000 секунд движения.

Задача 7. Рассмотрим уравнение
$$\ddot{x} = x^2 - x - 20.$$

a. (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.
b. (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).
c. (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.
d. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.
e. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при $t \to +\infty$. Отметить их на фазовом портрете.
f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех t. Все ли такие решения являются периодическими?

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.