

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 учебный год  
Дифференциальные уравнения  
Домашнее задание №2  
Илья Щуров, Анастасия Трофимова  
Фамилия и имя студента: Бугаев Григорий Михайлович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

## Задачи

**Определение 1.** Дифференциальной 1-формой называется функция из некоторой области  $U \subset V$  линейного пространства  $V$  в множество линейных функционалов на  $V$ . Иными словами, говорят, что задана дифференциальная 1-форма, если в каждой точке множества  $U$  задан некоторый ковектор.

**Определение 2.** Рассмотрим дифференциальную 1-форму  $\omega$  на плоскости. Пусть  $P$  — некоторая точка плоскости. Отложим от точки  $P$  все возможные векторы  $v$ , такие что  $\omega|_P(v) = 0$ . Если  $\omega|_P \neq 0$ , все такие векторы для фиксированной точки будут лежать на одной прямой. Получится поле направлений, задаваемых уравнением  $\omega = 0$ .

**Задача 1.** (3 балла за каждый пункт.)

Для каждой из следующих дифференциальных форм построить поле направлений, которые задаются уравнением  $\omega = 0$ . (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1. Отметить точки, в которых направление не задано.)

а.  $\omega = 2 dx + 4 dy$

б.  $\omega = 3x dx + 5y dy$

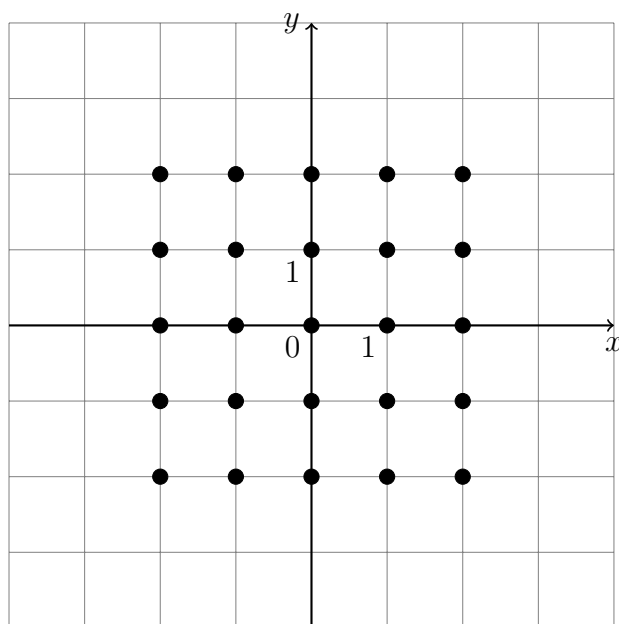


Рис. 1: Рисунок к задачам

- c.  $\omega = 2y dx - 3x dy$   
 d.  $\omega = 2y dx + 2x dy$

**Задача 2.** (3 балла за каждый пункт.) Для каждого из следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений, которое им задаётся. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1.) Как связаны дифференциальные уравнения с дифференциальными формами из предыдущей задачи?

- a.  $y' = -\frac{1}{2}$       b.  $y' = -\frac{3x}{5y}$       c.  $y' = \frac{2y}{3x}$       d.  $y' = -\frac{y}{x}$

**Задача 3.** (5 баллов) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

- Найти все решения (зависимость  $(x(t), y(t))$ ).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость  $x$  от  $y$  и/или  $y$  от  $x$ ).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию  $x(0) = 0, y(0) = -1$ .

**Определение 3.** Уравнение  $y' = F(x, y)$  называется *однородным*, если  $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$  для любых  $\lambda, x, y$ .

**Задача 4.** Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 + x^2y + 4xy^2 - 9y^3}{x^3 + 4x^2y - 9xy^2} \tag{1}$$

- a. (3 балла) Показать, что уравнение является однородным.
- b. (3 балла) Нарисовать три различные изоклины для уравнения (1). (Подсказка: как в *принципе* могут выглядеть изоклины однородного уравнения?)
- c. (3 балла) Рассмотрим замену  $z = y/x$ . В какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте b, в координатах  $(z, x)$ ? Нарисуйте их.
- d. (4 балла) Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию  $z$ .
- e. (5 баллов) Решите уравнение (1). (Не требуется находить решение в виде явной функции  $y = y(x)$ , достаточно неявного задания.)

**Замечание 4.** Аналогичным образом (с помощью замены  $z = y/x$ ) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

**Задача 5.** Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

- a. (6 баллов)
 
$$\begin{cases} \dot{x} = -12y^3 \sin(y) \sin(x^4 + 3y^4) + \cos(y) \cos(x^4 + 3y^4) \\ \dot{y} = 4x^3 \sin(y) \sin(x^4 + 3y^4) \end{cases}$$
- b. (6 баллов)
 
$$-dx(x^3 + x^2y - 10xy^2 + 12y^3) + dy(x^3 - 10x^2y + 12xy^2) = 0$$
- c. (6 баллов)
 
$$y' = y(-25x^4 + \sin(x)) + (-25x^4 + \cos(x))e^{-5x^5 - \cos(x)}$$
- d. (6 баллов)
 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x^3 - 6x^2y + 3xy^2 \\ \dot{y} = x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 \end{cases}$$
- e. (6 баллов)
 
$$y' = \frac{2x \sin(y) \sin(x^2 + 5y^4)}{-20y^3 \sin(y) \sin(x^2 + 5y^4) + \cos(y) \cos(x^2 + 5y^4)}$$

**Задача 6.** Рассмотрим следующую модель: на плоскости есть несколько точечных массивных тел, положения которых фиксированы («планеты»), а также одно подвижное тело («спутник»). На спутник действуют силы притяжения каждой из планет, определяемые по закону всемирного тяготения:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  и  $M$  — массы взаимодействующих тел,  $r$  — расстояние между ними.

На любом языке программирования написать программу, находящую координаты спутника в произвольный момент времени по его начальным координатам и скорости и с помощью этой программы выполнить следующие пункты.

- a. (10 баллов) Пусть центр Земли находится в начале координат, спутник запускается с поверхности Земли в направлении, перпендикулярном радиусу, с начальной скоростью  $v_0$ . Никаких других планет нет. Нарисовать траектории движения спутника (на плоскости) для  $v_0 = 5, 9, 12$  км/с за 10000 секунд движения. Считать массу земли сосредоточенной в её центре. Столкновением спутника с поверхностью земли пренебречь.  
Подсказка: произведение массы Земли на гравитационную постоянную можно легко найти: оно называется *гравитационным параметром*.

- b. (10 баллов) С помощью программы, найти первую космическую скорость (в км/с), то есть такую скорость, при которой спутник выходит на круговую орбиту вокруг Земли. Сравнить с реальным значением первой космической скорости.
- c. (10 баллов) Пусть две планеты массой, равной массе Земли, расположены таким образом, что расстояние между их центрами составляет 40000 км. Ровно посередине между ними находится спутник. Начальная скорость спутника направлена под углом в 45 градусов к прямой, соединяющей центры планет. Положение планет фиксированно и не меняется со временем. Взять все начальные скорости от 1 до 5 км/с с шагом в 0.5 км/с и для каждой построить траекторию за первые 20000 секунд движения.

**Задача 7.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = x^2 - 4x - 5.$$

- a. (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.
- b. (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).
- c. (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.
- d. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.
- e. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при  $t \rightarrow +\infty$ . Отметить их на фазовом портрете.
- f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех  $t$ . Все ли такие решения являются периодическими?

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.