

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №1

Илья Щуров, Анастасия Трофимова

Фамилия и имя студента: Новиков Сергей Андреевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

## Задачи

**Замечание 1.** В задачах 1–6 можно нарисовать соответствующие картинки вручную (аккуратно) на бумажке и вставить скан, либо использовать любой подходящий компьютерный инструмент. Помните: на мидтерме и финале у вас не будет возможности пользоваться компьютерными инструментами.

Напоминаем, что в качестве решений дифференциальных уравнений мы рассматриваем только функции, определённые на связном подмножестве прямой (таком подмножестве, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок между этими точками). Если в какой-то точке правая часть дифференциального уравнения не определена, то решение не может проходить через эту точку.

**Задача 1.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = \frac{1}{3} \frac{t}{x}$ .

- Построить поле направлений.
- Найти общий вид решений.

с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$ ,
- $x(0) = -1$

**Задача 2.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -\frac{4t}{3x}$ .

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$ ,
- $x(0) = -1$

**Задача 3.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -4\frac{x}{t}$ .

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- |                 |                  |                |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$ ,  | • $x(-1) = 1$ ,  | • $x(1) = 0$ , |
| • $x(1) = -1$ , | • $x(-1) = -1$ , | • $x(-1) = 0$  |

**Задача 4.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = 2\frac{x}{t}$ .

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- |                 |                  |                |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$ ,  | • $x(-1) = 1$ ,  | • $x(1) = 0$ , |
| • $x(1) = -1$ , | • $x(-1) = -1$ , | • $x(-1) = 0$  |

**Задача 5.** (20 баллов) Рассмотрим систему уравнений

a.  $\begin{cases} \dot{x} = -4x \\ \dot{y} = y \end{cases}$                       b.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y \end{cases}$

- Найти все решения (зависимость  $x(t)$ ,  $y(t)$ ).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость  $x$  от  $y$  и/или  $y$  от  $x$ ).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = -1$ .

**Задача 6.** (40 баллов) Рассмотрим уравнение.

$$\dot{x} = (5t - x - 4)^2 + 4 \quad (1)$$

- a. (5 баллов) Подобрать подходящую замену, свести уравнение к автономному.
- b. (10 баллов) Нарисовать поле направлений и эскизы интегральных кривых для исходного уравнения и уравнения после замены. Как они связаны между собой?
- c. (15 баллов) Найти все решения исходного уравнения (в виде  $x = x(t)$ ).  
*Внимание!* В ходе преобразований необходимо аккуратно учитывать знаки выражений, стоящих под логарифмами. В зависимости от выбора знаков будут получаться различные семейства кривых.
- d. (5 баллов) Найти решение, удовлетворяющее начальному условию  $x(3) = 12$ , и нарисовать соответствующую интегральную кривую.
- e. (10 баллов) Найти область определения решения в зависимости от начального условия. Исследовать предельное поведение решений при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  (если решения определены для соответствующих значений  $t$ ). Существуют ли решения, уходящие на бесконечность за конечное время?
- f. (5 баллов) Что вы можете сказать про горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты решений?

**Задача 7.** (20 баллов) Написать на любом языке программирования программу, решающую дифференциальное уравнение с одномерными фазовым пространством с помощью метода Эйлера.

- a. Построить график истинного решения и эйлеровских приближений для дифференциального уравнения  $\dot{x} = 2x^2 + 2$  и начального условия  $x(0) = 1$  на отрезке  $[0, 1/2]$ . (Выберите разумный масштаб вертикальной оси.) Эйлеровские приближения вычислить, разбивая отрезок интегрирования на 10, 30, 50, 100, 300, 500, 1000 частей.
- b. Сколько шагов нужно выбрать, чтобы в точке  $t = 0,25$  ошибка приближения не превышала  $10^{-2}$ . А в точке  $t = 0,3$ ? А в точке  $t = 0,35$ ? А в точке  $t = 0,4$  (ага, тут подвох!)?