

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №1

Илья Щуров, Анастасия Трофимова

Фамилия и имя студента: Муромцева Анастасия Дмитриевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Замечание 1. В задачах 1–6 можно нарисовать соответствующие картинки вручную (аккуратно) на бумажке и вставить скан, либо использовать любой подходящий компьютерный инструмент. Помните: на мидтерме и финале у вас не будет возможности пользоваться компьютерными инструментами.

Напоминаем, что в качестве решений дифференциальных уравнений мы рассматриваем только функции, определённые на связном подмножестве прямой (таком подмножестве, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок между этими точками). Если в какой-то точке правая часть дифференциального уравнения не определена, то решение не может проходить через эту точку.

Задача 1. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{1}{3} \frac{t}{x}$.

- Построить поле направлений.
- Найти общий вид решений.

с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 2. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{2t}{3x}$.

а. Построить поле направлений.
 б. Найти общий вид решений.
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 3. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = 5\frac{x}{t}$.

а. Построить поле направлений.
 б. Найти общий вид решений.
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- | | | |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$, | • $x(-1) = 1$, | • $x(1) = 0$, |
| • $x(1) = -1$, | • $x(-1) = -1$, | • $x(-1) = 0$ |

Задача 4. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{2x}{5t}$.

а. Построить поле направлений.
 б. Найти общий вид решений.
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- | | | |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$, | • $x(-1) = 1$, | • $x(1) = 0$, |
| • $x(1) = -1$, | • $x(-1) = -1$, | • $x(-1) = 0$ |

Задача 5. (20 баллов) Рассмотрим систему уравнений

а. $\begin{cases} \dot{x} = 5x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ б. $\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = 5y \end{cases}$

- Найти все решения (зависимость $x(t)$, $y(t)$).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость x от y и/или y от x).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Задача 6. (40 баллов) Рассмотрим уравнение.

$$\dot{x} = (-8t - 2x + 3)^2 - 5 \quad (1)$$

- a. (5 баллов) Подобрать подходящую замену, свести уравнение к автономному.
- b. (10 баллов) Нарисовать поле направлений и эскизы интегральных кривых для исходного уравнения и уравнения после замены. Как они связаны между собой?
- c. (15 баллов) Найти все решения исходного уравнения (в виде $x = x(t)$).
Внимание! В ходе преобразований необходимо аккуратно учитывать знаки выражений, стоящих под логарифмами. В зависимости от выбора знаков будут получаться различные семейства кривых.
- d. (5 баллов) Найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(4) = -14$, и нарисовать соответствующую интегральную кривую.
- e. (10 баллов) Найти область определения решения в зависимости от начального условия. Исследовать предельное поведение решений при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ (если решения определены для соответствующих значений t). Существуют ли решения, уходящие на бесконечность за конечное время?
- f. (5 баллов) Что вы можете сказать про горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты решений?

Задача 7. (20 баллов) Написать на любом языке программирования программу, решающую дифференциальное уравнение с одномерными фазовым пространством с помощью метода Эйлера.

- a. Построить график истинного решения и эйлеровских приближений для дифференциального уравнения $\dot{x} = 2x^2 + 2$ и начального условия $x(0) = 1$ на отрезке $[0, 1/2]$. (Выберите разумный масштаб вертикальной оси.) Эйлеровские приближения вычислить, разбивая отрезок интегрирования на 10, 30, 50, 100, 300, 500, 1000 частей.
- b. Сколько шагов нужно выбрать, чтобы в точке $t = 0,25$ ошибка приближения не превышала 10^{-2} . А в точке $t = 0,3$? А в точке $t = 0,35$? А в точке $t = 0,4$ (ага, тут подвох!)?