

ФИО: _____.

Правила

Строго запрещено:

- как-либо общаться с другими людьми, кроме прокторов,
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

Желаем удачи!

Задача 1. Докажите утверждение, пользуясь только определением предела (для функций — по Коши), преобразованием утверждений с кванторами и алгебраическими преобразованиями. Пользоваться какими-либо фактами про пределы нельзя (в том числе, единственностью предела), всё нужно доказывать явно и ручками. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно пользоваться неравенством Бернулли.

a. Неверно, что $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 35}{7} = -5$.

b. Верно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n-6} = 0$

Задача 2. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6n}\right)^{5n+8}.$$

Можно пользоваться всеми фактами, которые были сформулированы на лекциях или были включены в семинарские листочки и домашние задания, а также их прямыми аналогами. В ответе могут быть значения элементарных функций (тригонометрических, логарифмов, экспоненты). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это.

Задача 3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{4^x + 5^{-x}}{-7^x + 6^{-x}}\right)$$

Можно пользоваться всеми фактами, которые были сформулированы на лекциях или были включены в семинарские листочки и домашние задания, а также их прямыми аналогами. В ответе могут быть значения элементарных функций (тригонометрических, логарифмов, экспоненты). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это.

Задача 4. Рассмотрим функцию, заданную следующей формулой:

$$f(x) = \frac{x^2 + 9x + 14}{x - a}.$$

Как видно, в формуле участвует a — это параметр, который может принимать произвольные фиксированные вещественные значения.

Исследовать эту функцию в зависимости от значения a .

- Найти естественную область определения функции. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.)
- Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода), найти пределы слева и справа или доказать, что они не существуют.
- Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке?

- d. Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
- e. Верно ли, что для любого отрезка $[A, B]$ функция является ограниченной на пересечении этого отрезка с её областью определения?

Ответы могут задаваться формулами, включающими a , и иным образом зависеть от a . (Например, вполне возможен ответ вида «при таких-то значениях a ответ вот такой, а при всех других — эдакий».)

Все утверждения нужно доказывать. Например, если вы говорите, что у функции есть такие-то точки разрыва, нужно доказать, что все остальные точки не являются точками разрыва (то есть, что в них функция непрерывна).

Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

Задача 5. Рассмотрим функцию f , определённую на \mathbb{R} . Пусть про неё известно, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(6 \cos\left(\frac{5\pi}{x}\right)\right) = -4.$$

Найти $f(3)$, если это возможно сделать однозначно, либо доказать, что в задаче недостаточно данных, чтобы найти $f(3)$.