

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №6

Фамилия и имя студента: Мартеев Александр Дмитриевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, фотография работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов за каждый пункт) Исследовать интеграл. Если он собственный, найти его. Если несобственный, исследовать сходимость. Если сходится, найти его, если расходится — доказать, что расходится.

a.  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

b.  $\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$

c.  $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx$

d.  $\int_{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx$

e.  $\int_0^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{3} - 3\right) dx$

f.  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

g.  $\int_1^2 \frac{\ln(x)^2}{x^3} dx$

h.  $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx$

i.  $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$

**Задача 2.** (15 баллов) Доказать, что

$$5\sqrt{2} \leq \int_1^6 \sqrt{x^5+1} dx \leq \frac{46685}{6}$$

**Задача 3.** (5+15 баллов) Функция  $\Phi(x)$  определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx.$$

Выразить следующие интегралы через  $\Phi$ :

a.

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} dx.$$

b.

$$\int_{-5}^{-3} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}} dx.$$

(Сейчас выглядит страшновато, но на теорвере пригодится. Вам нужно понять, как связаны графики подынтегральных выражений и соответствующие площади.)

**Задача 4.** (20 баллов) Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и в некоторой точке  $c \in (a, b)$ ,  $f(c) = 0$  и существует производная  $f'(c)$ . Предположим также, что в некоторой окрестности  $c$  нет других корней  $f$ . Докажите, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

расходится.