

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №6

Фамилия и имя студента: Ежов Дмитрий Маратович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, фотография работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов за каждый пункт) Исследовать интеграл. Если он собственный, найти его. Если несобственный, исследовать сходимость. Если сходится, найти его, если расходится — доказать, что расходится.

a.  $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx$

b.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin(x)}{x^6+1} dx$

c.  $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$

d.  $\int_0^1 \frac{e^x+1}{x+e^x} dx$

e.  $\int_0^1 \sin(\pi x - 4) dx$

f.  $\int_0^{\pi} e^{\cos(x)} \sin(2x) dx$

g.  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$

h. 
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

i. 
$$\int_0^1 x e^{-2x} dx$$

**Задача 2.** (15 баллов) Доказать, что

$$8\sqrt{61} \leq \int_3^7 \sqrt{x^5 + 1} dx \leq \frac{58472}{3}$$

**Задача 3.** (5+15 баллов) Функция  $\Phi(x)$  определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx.$$

Выразить следующие интегралы через  $\Phi$ :

a.

$$\int_{-4}^5 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2}} dx.$$

b.

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}} dx.$$

(Сейчас выглядит страшновато, но на теореме пригодится. Вам нужно понять, как связаны графики подынтегральных выражений и соответствующие площади.)

**Задача 4.** (20 баллов) Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и в некоторой точке  $c \in (a, b)$ ,  $f(c) = 0$  и существует производная  $f'(c)$ . Предположим также, что в некоторой окрестности  $c$  нет других корней  $f$ . Докажите, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

расходится.