

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год  
Математический анализ — 1  
Домашнее задание №6  
Фамилия и имя студента: Воронин Андрей Викторович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, фотография работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов за каждый пункт) Исследовать интеграл. Если он собственный, найти его. Если несобственный, исследовать сходимость. Если сходится, найти его, если расходится — доказать, что расходится.

a.  $\int_0^{\pi} e^{\cos(x)} \sin(2x) dx$

b.  $\int_0^1 x^2 (2x^3 + 1)^5 dx$

c.  $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx$

d.  $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx$

e.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$

f.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin(x)}{x^6 + 1} dx$

g.  $\int_{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx$

h.  $\int_0^{\pi} x^3 \cos(x) dx$

i.  $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 3} dx$

**Задача 2.** (15 баллов) Доказать, что

$$\sqrt{1297} \leq \int_6^7 \sqrt{x^4 + 1} dx \leq \frac{9036}{5}$$

**Задача 3.** (5+15 баллов) Функция  $\Phi(x)$  определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx.$$

Выразить следующие интегралы через  $\Phi$ :

a.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx.$$

b.

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+5)^2}{18}} dx.$$

(Сейчас выглядит страшновато, но на теореме пригодится. Вам нужно понять, как связаны графики подынтегральных выражений и соответствующие площади.)

**Задача 4.** (20 баллов) Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и в некоторой точке  $c \in (a, b)$ ,  $f(c) = 0$  и существует производная  $f'(c)$ . Предположим также, что в некоторой окрестности  $c$  нет других корней  $f$ . Докажите, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

расходится.