

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №5

*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

Фамилия и имя студента: Роднищев Ярослав Игоревич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6ax + 9a + 7x - 21, & x \leq 3 \\ 5x^2 - 23x + 24, & x > 3 \end{cases}$$

имеет первую производную в точке 3, но не имеет второй.

**Задача 2.** (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|4x-4|}\right), & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Докажите, что эта функция является дифференцируемой в точке 1 сколько угодно раз, найдите все её производные в этой точке и выпишите её ряд Тейлора в этой точке ( $x_0 = 1$ ). Сходится ли ряд Тейлора к функции, то есть верно ли, что для всех  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x),$$

где  $T_n(x)$  — многочлен Тейлора степени  $n$ ? Почему это не противоречит теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано? В форме Лагранжа?

**Задача 3.** (10 баллов за каждый пункт) Найти предел

а. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{128x^5}{3} + 32x^3 + 4x \cos(4x) - 4x}{-\frac{32x^5}{5} + 4x^4 - \frac{8x^3}{3} + 2x^2 - 2x + \ln(2x + 1)};$$

б. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x + e^{\sin(5x^2 + 4x)} - 1}{-4x + \sin(4x + \sin(4x^2))}.$$

**Задача 4.** (10 баллов) Про функцию  $f$  известно, что она дважды дифференцируема для  $x \geq 0$ ,  $f(0) = 2$  и  $f'(0) = -1$  и  $f''(x) > 6$  для всех  $x \geq 0$ . Докажите, что для всех  $x > 0$ ,  $f(x) > 3x^2 - x + 2$ .

**Задача 5.** (10 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{6x}) - \sqrt[3]{6x}.$$

Дифференцируема ли она в точке  $x = 0$ ? Если да, найти её производную в этой точке.