

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №5

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Махаев Дмитрий Денисович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов) Найти все значения параметра a , при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6ax + 9a + 3x - 9, & x \leq 3 \\ 5x^2 - 27x + 36, & x > 3 \end{cases}$$

имеет первую производную в точке 3, но не имеет второй.

Задача 2. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|5x-10|}\right), & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Докажите, что эта функция является дифференцируемой в точке 2 сколько угодно раз, найдите все её производные в этой точке и выпишите её ряд Тейлора в этой точке ($x_0 = 2$). Сходится ли ряд Тейлора к функции, то есть верно ли, что для всех x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x),$$

где $T_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n ? Почему это не противоречит теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано? В форме Лагранжа?

Задача 3. (10 баллов за каждый пункт) Найти предел

а.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{81x^5}{40} + \frac{9x^3}{2} - 3x + \sin(3x)}{-\frac{32x^5}{5} + 4x^4 - \frac{8x^3}{3} + 2x^2 - 2x + \ln(2x + 1)};$$

б.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + \ln(\sin(5x^2 + 3x) + 1)}{-4x + e^{4x + \sin(2x^2)} - 1}.$$

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она дважды дифференцируема для $x \geq 0$, $f(0) = 2$ и $f'(0) = -1$ и $f''(x) > 10$ для всех $x \geq 0$. Докажите, что для всех $x > 0$, $f(x) > 5x^2 - x + 2$.

Задача 5. (10 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{3x}) - \sqrt[3]{3x}.$$

Дифференцируема ли она в точке $x = 0$? Если да, найти её производную в этой точке.