

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №5

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Костина Полина Витальевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов) Найти все значения параметра a , при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 12ax + 36a + 3x - 18, & x \leq 6 \\ 2x^2 - 21x + 54, & x > 6 \end{cases}$$

имеет первую производную в точке 6, но не имеет второй.

Задача 2. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|3x-6|}\right), & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Докажите, что эта функция является дифференцируемой в точке 2 сколько угодно раз, найдите все её производные в этой точке и выпишите её ряд Тейлора в этой точке ($x_0 = 2$). Сходится ли ряд Тейлора к функции, то есть верно ли, что для всех x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x),$$

где $T_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n ? Почему это не противоречит теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано? В форме Лагранжа?

Задача 3. (10 баллов за каждый пункт) Найти предел

а.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{81x^5}{8} + \frac{27x^3}{2} + 3x \cos(3x) - 3x}{-\frac{128x^5}{15} + \frac{32x^3}{3} - 4x + \sin(4x)};$$

б.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + \ln(\sin(2x^2 + 3x) + 1)}{-3x + e^{3x + \sin(4x^2)} - 1}.$$

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она дважды дифференцируема для $x \geq 0$, $f(0) = 4$ и $f'(0) = -2$ и $f''(x) > 10$ для всех $x \geq 0$. Докажите, что для всех $x > 0$, $f(x) > 5x^2 - 2x + 4$.

Задача 5. (10 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{3x}) - \sqrt[3]{3x}.$$

Дифференцируема ли она в точке $x = 0$? Если да, найти её производную в этой точке.