

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Полонецкий Илья Игоревич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в ту.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (с) и (f), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

- $f(x) = -8x^3 + 24x^2 - 18x + 2$;
- $f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 10}{2x + 3}$;
- $f(x) = \sin(\ln(4x^2 - 16x + 20))$;
- $f(x) = 4x^2 - 10x + \ln(4 - 2x) + 4$;
- $f(x) = e^{-4x^2 - 12x - 9}$;
- $f(x) = \exp\left(\frac{2 - 2x}{-4x^2 + 8x - 3}\right)$.

Задача 2. (10 + 5 баллов) Рассмотрим функции $f(x) = \lambda x + \sin(2x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторый вещественный параметр, и $g(t) = 3t^5 + 2t^3 + 3t + 1$. Пусть $h(x) = g(f(x))$, областью определения h являются все вещественные числа.

- При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ функция h обратима?
- Пусть $\lambda = 5$ и $h^{-1}(y)$ — обратная функция. Найти значение производной $(h^{-1}(y))'$ в точке $y_0 = 1$.

Задача 3. (5 + 10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^3 = e^{-x} + 2 \sin\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right)$$

- а. есть корень;
- б. он ровно один.

Подсказка к пункту (б). Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях x .

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она определена на отрезке $[4, 10]$, непрерывна на этом отрезке, дифференцируема во всех точках интервала $(4, 10)$ и $f(4) = -3$. Также известно, что для всех $x \in (4, 10)$

$$f'(x) \geq 2.$$

Докажите, что

$$f(10) \geq 9.$$

Задача 5. (10 + 5 баллов) Пусть функция f определена на некотором отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и строго выпукла вверх.

- а. Докажите, что у этой функции существует локальный максимум, причём он единственный и является глобальным максимумом. Производными пользоваться нельзя — не факт, что они существуют.
- б. Справедливо ли утверждение предыдущего пункта, если в условии заменить отрезок $[a, b]$ на интервал (a, b) ? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Если вы используете какие-то теоремы из лекций, пожалуйста, ссылайтесь на них явно.