Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №3
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Мазавина Юлия Сергеевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (c) и (f), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

a. $f(x) = 8x^3 - 24x^2 + 18x - 2$;
b. $f(x) = \frac{4x^2+8x+5}{2x+2}$;
c. $f(x) = \cos(\ln(4x^2 + 4x + 4))$;
d. $f(x) = 4x^2 + 10x + \ln(2x + 4) + 4$;
e. $f(x) = e^{-4x^2+12x-9}$;
f. $f(x) = \exp\left(\frac{1-2x}{-4x^2+4x}\right)$.

Задача 2. (10 + 5 баллов) Рассмотрим функции $f(x) = \lambda x + \sin(2x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторый вещественный параметр, и $g(t) = e^{2t^3+4t} + 3$. Пусть $h(x) = g(f(x))$, областью определения h являются все вещественные числа.

a. При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ функция h обратима?
b. Пусть $\lambda = 6$ и $h^{-1}(y)$ — обратная функция. Найти значение производной $(h^{-1}(y))'$ в точке $y_0 = 4$.

Задача 3. (5 + 10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^3 = e^{-x} + 4\sin\left(\frac{x}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

a. есть корень;
b. он ровно один.

Подсказка к пункту (b). Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях x.

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она определена на отрезке $[-4, 0]$, непрерывна на этом отрезке, дифференцируема во всех точках интервала $(-4, 0)$ и $f(-4) = -2$. Также известно, что для всех $x \in (-4, 0)$

$$f'(x) < -3.$$

Докажите, что

$$f(0) < -14.$$

Задача 5. (10 + 5 баллов) Пусть функция f определена на некотором отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и строго выпукла вниз.

a. Докажите, что у этой функции существует локальный минимум, причём он единственный и является глобальным минимумом. Производными пользоваться нельзя — не факт, что они существуют.
b. Справедливо ли утверждение предыдущего пункта, если в условии заменить отрезок $[a, b]$ на интервал (a, b)? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Если вы используете какие-то теоремы из лекций, пожалуйста, ссылайтесь на них явно.