

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Мартеев Александр Дмитриевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в му.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (с) и (f), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

а.  $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 2$ ;

б.  $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 2}{2x - 1}$ ;

с.  $f(x) = \cos(\ln(4x^2 - 8x + 6))$ ;

д.  $f(x) = 4x^2 + 10x + \ln(-2x - 1) + 4$ ;

е.  $f(x) = e^{-4x^2 + 12x - 9}$ ;

ф.  $f(x) = \exp\left(\frac{4 - 2x}{-4x^2 + 16x - 15}\right)$ .

**Задача 2.** (10 + 5 баллов) Рассмотрим функции  $f(x) = \lambda x + \sin(2x)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  — некоторый вещественный параметр, и  $g(t) = 3 - e^{-e^{3t}}$ . Пусть  $h(x) = g(f(x))$ , областью определения  $h$  являются все вещественные числа.

а. При каких значениях параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$  функция  $h$  обратима?

б. Пусть  $\lambda = 3$  и  $h^{-1}(y)$  — обратная функция. Найти значение производной  $(h^{-1}(y))'$  в точке  $y_0 = 3 - e^{-1}$ .

**Задача 3.** (5 + 10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^{11} = e^{-x} + 4 \sin\left(\frac{x}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

- а. есть корень;
- б. он ровно один.

*Подсказка к пункту (б).* Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях  $x$ .

**Задача 4.** (10 баллов) Про функцию  $f$  известно, что она определена на отрезке  $[3, 9]$ , непрерывна на этом отрезке, дифференцируема во всех точках интервала  $(3, 9)$  и  $f(3) = -4$ . Также известно, что для всех  $x \in (3, 9)$

$$f'(x) \geq 5.$$

Докажите, что

$$f(9) \geq 26.$$

**Задача 5.** (10 + 5 баллов) Пусть функция  $f$  определена на некотором отрезке  $[a, b]$ , непрерывна на этом отрезке и строго выпукла вниз.

- а. Докажите, что у этой функции существует локальный минимум, причём он единственный и является глобальным минимумом. Производными пользоваться нельзя — не факт, что они существуют.
- б. Справедливо ли утверждение предыдущего пункта, если в условии заменить отрезок  $[a, b]$  на интервал  $(a, b)$ ? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Если вы используете какие-то теоремы из лекций, пожалуйста, ссылайтесь на них явно.