

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

*И. Щуров, М. Бекетов, В. Болбачан, А. Трофимова, И. Эрлих*

Фамилия и имя студента: Лаврентьев Владимир Сергеевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, фото работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF, либо нарисовать ручкой на графическом планшете прямо в PDF.

### Задачи

**Задача 1.** (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции  $y = f(x)$ .

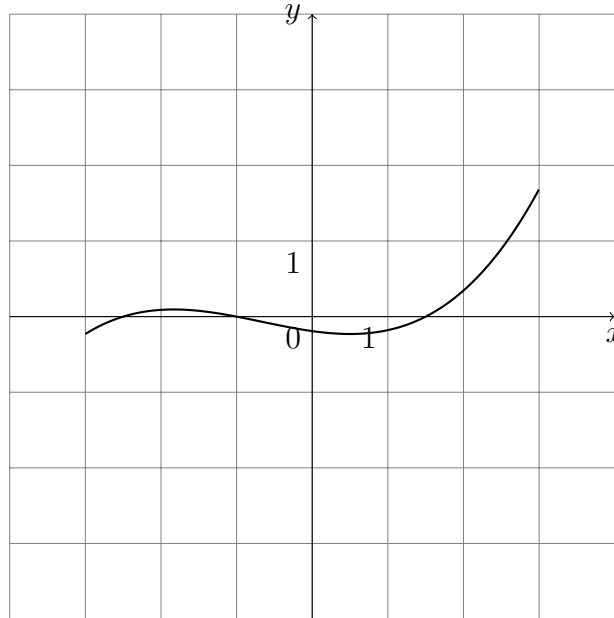


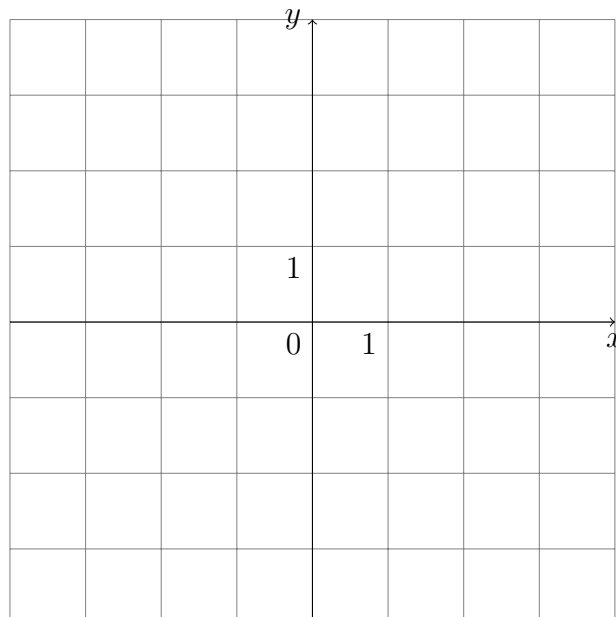
Рис. 1: Рисунок к задаче 1

а. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$													

б. Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) + 1$ . Чему равно  $g(0)$ ?  $g(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $g(x)$  и  $f(x)$ ?

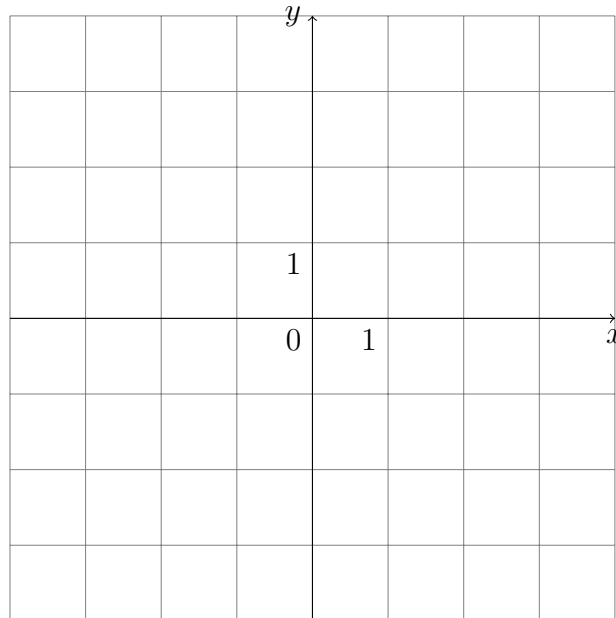
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$													



Ответ:

c. Рассмотрим функцию  $h(x) = 2f(x)$ ; Чему равно  $h(0)$ ?  $h(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $h(x)$ ?

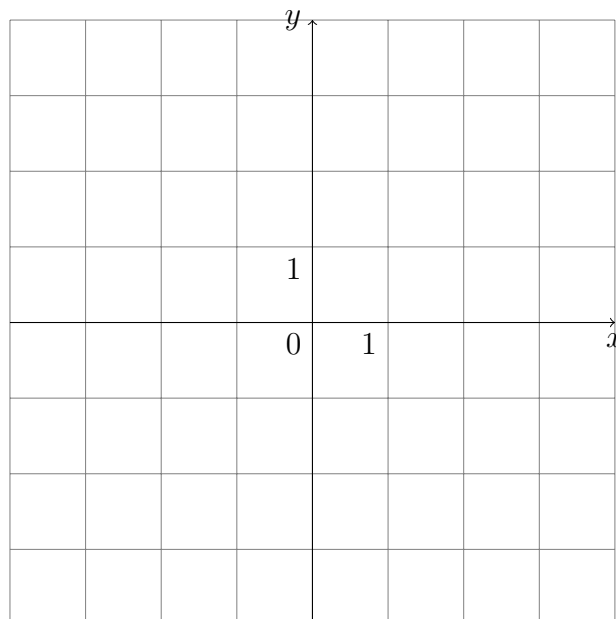
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

d. Рассмотрим функцию  $u(x) = f(x + 1)$ ; Чему равно  $u(0)$ ?  $u(-1)$ ?  $u(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $u(x)$ ?

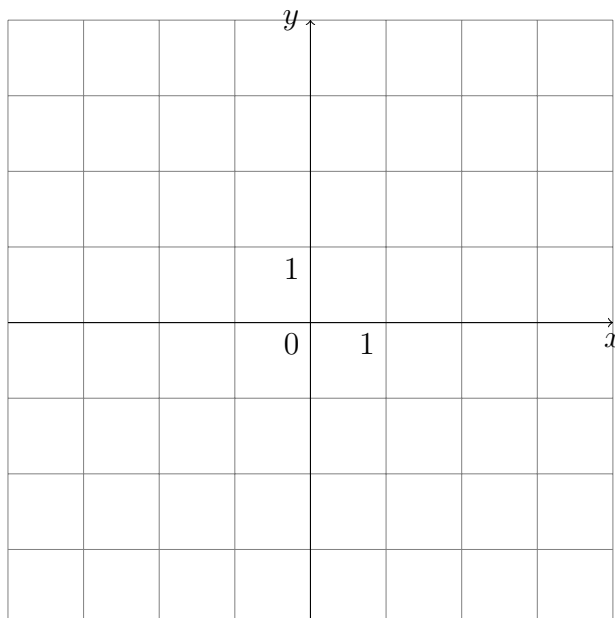
$x$	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$u(x)$													



Ответ:

е. Рассмотрим функцию  $v(x) = f(2x)$ ; Чему равно  $v(0)$ ?  $v(1)$ ?  $v(0,5)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $v(x)$ ?

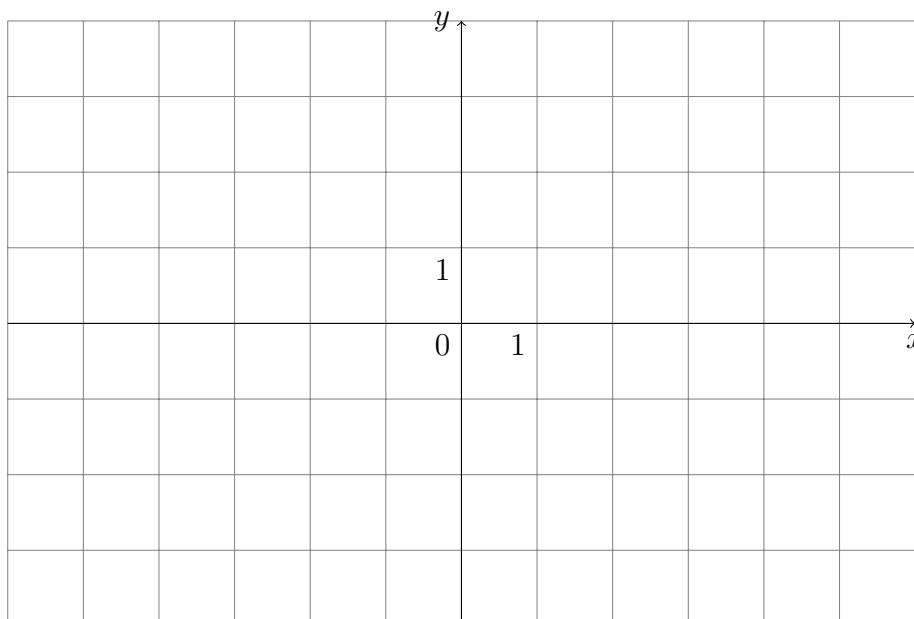
$x$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$v(x)$							



Ответ:

ф. Рассмотрим функцию  $z(x) = f(x/2)$ ; Чему равно  $z(0)$ ?  $z(1)$ ?  $z(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $z(x)$ ?

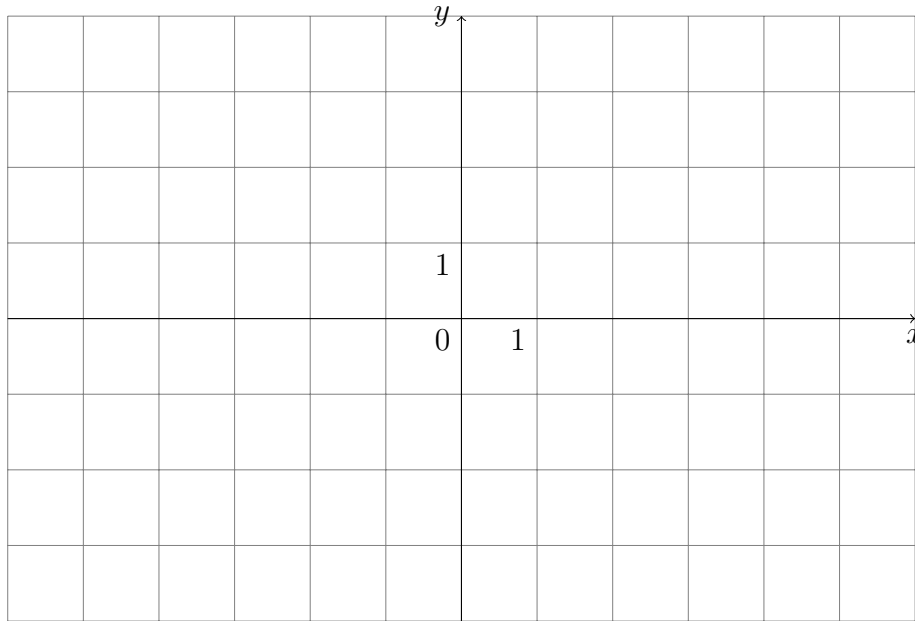
$x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$z(x)$													



Ответ:

g. Рассмотрим функцию  $m(x) = |f(x)|$ ; Чему равно  $m(0)$ ?  $m(1)$ ?  $m(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $m(x)$ ?

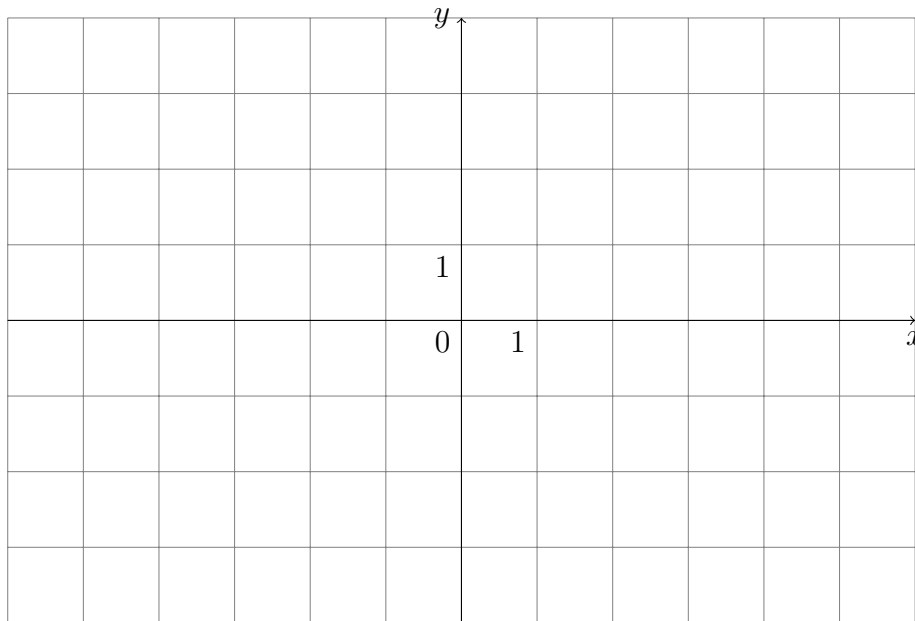
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

h. Рассмотрим функцию  $r(x) = f(|x|)$ ; Чему равно  $r(0)$ ?  $r(1)$ ?  $r(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $r(x)$ ?

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

**Задача 2.** (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции  $y = f(x)$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = f(2x + 2)$ .

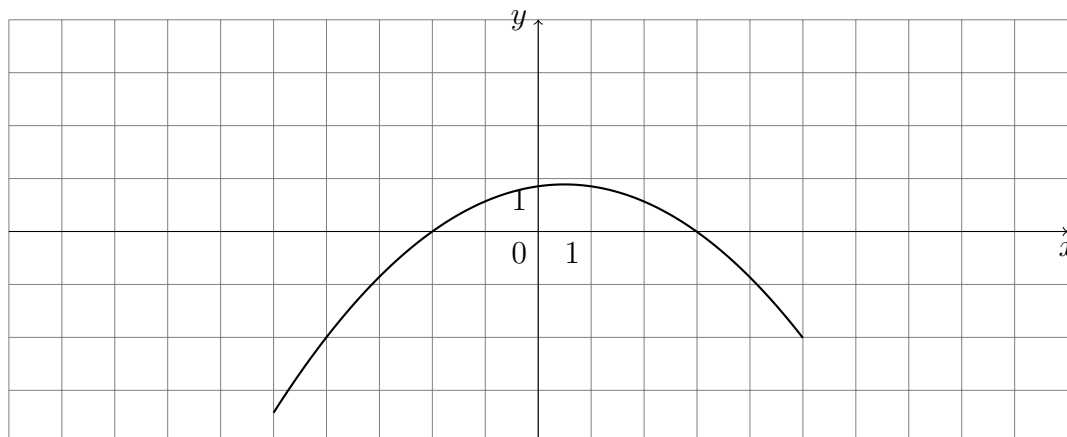


Рис. 2: Рисунок к задаче 2

- Найти область определения функции  $g(x)$ .
- Найти значение функции  $g(x)$  в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
- Построить график  $g(x)$ .
- Описать словами, что надо сделать с графиком функции  $f(x)$ , чтобы получить график функции  $g(x)$ . Какие точки при этом преобразовании остаются на месте?

*Решение:*

**Задача 3.** (10 баллов) Пусть функция  $f$  определена в проколотой окрестности точки  $x = 1$ . Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (1)$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \right) \wedge \left( \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \right) \quad (2)$$

Докажите, пользуясь определением пределов по Коши, что утверждения (1) и (2) эквивалентны. Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

**Задача 4.** (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками  $\infty$ ,  $+\infty$  и  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

**Задача 5.** (18 баллов) Угадать предел функции и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции (по Коши, с эpsilonми и дельтами). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

a.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^3$ ;

b.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+3}{x+4}$ .

**Задача 6.** (15 баллов) Вычислите предел функции или докажите, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можно пользоваться всеми фактами о пределах, которые обсуждались на лекциях или были включены в семинарские листочки в виде утверждений или задач. Если пользуетесь каким-то утверждением, давайте на него ссылку.

a.  $\lim_{x \rightarrow 5} e^{\frac{x^2-5}{x-5}}$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \\ x^2 + 4x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^5 + 3^{-x}}$ .

**Задача 7.** (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = +\infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

**Задача 8.** (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(1 - e^{2x})^4 + 1}$$

**Задача 9.** (10 + 10 баллов). Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех  $x$ , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

а.  $f(x) = \exp \frac{1}{(x-4)(x-1)^2}$ .

б.  $f(x) = \frac{-3x^5 + 3^{-x}}{x^4 + 2 \cdot 3^{-x}}$ .