

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №2

И. Щуров, М. Бекетов, В. Болбачан, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Школьников Максим Алексеевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в ту.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Style guide.** Пожалуйста, пишите подробные доказательства всех утверждений со всеми необходимыми выкладками, логическими переходами и т.д. Решения должны представлять собой текст, который можно прочитать и понять, а не просто последовательность формул.

## Задачи

**Лемма 1.** Если существует такое  $C$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что для любых  $n > N$ ,  $|a_n - a| < C\varepsilon$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

**Задача 1.** (15 баллов за каждый пункт.) Рассмотрим две последовательности  $\{a_m\}$  и  $\{b_k\}$ . Рассмотрим последовательность  $\{c_n\}$ , определённую следующим образом: первые 4 элемента  $\{c_n\}$  это первые 4 элемента  $\{a_m\}$ , следующие 3 элемента  $\{c_n\}$  это первые 3 элемента  $\{b_k\}$ , следующие 4 элемента  $\{c_n\}$  это следующие 4 элемента  $\{a_m\}$  (начиная с  $a_5$ ), следующие 3 элемента  $\{c_n\}$  это следующие 3 элемента  $\{b_k\}$  (начиная с  $b_4$ ) и так далее, процесс продолжается периодически, на каждом шаге из  $\{a_m\}$  берутся очередные 4 элемента, а из  $\{b_k\}$  очередные 3 элемента. Начало последовательности  $\{c_n\}$  имеет вид:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, a_5, a_6, a_7, a_8, b_4, b_5, b_6, \dots$$

Пользуясь определением предела, докажите, что

- а. если пределы последовательностей  $\{a_m\}$  и  $\{b_k\}$  существуют и совпадают (обозначим их за  $A$ ), то предел последовательности  $\{c_n\}$  также существует и равен  $A$ ;

- b. если пределы последовательностей  $\{a_m\}$  и  $\{b_k\}$  существуют и не совпадают, то предел  $\{c_n\}$  не существует,  
 c. если предел хотя бы одной из последовательностей  $\{a_m\}$  и  $\{b_k\}$  не существует, то предел  $\{c_n\}$  также не существует.

Пользоваться какими-либо теоремами о пределах нельзя, только определением.

**Задача 2.** (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 3 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

- a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^8 + 4}}{4n^2 - 4}$ ;  
 b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{7^n}$ .  
 c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1,5^n}{n!}$ .  
 d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^4 + 2n)}{n}$ .  
 e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{(-1)^{n^8} \pi}{4}\right)$ .

**Задача 3.** (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

- a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 9n - 6} - \sqrt{4n^2 + 7n - 5})$ ;  
 b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 5} - \sqrt{4n^2 + 3n - 3})$ ;  
 c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 6^{-3n}}{-3^n + 4^{-2n}}$ ;  
 d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7^n + 5^{-n}}{9^n + 8^{-3n}}$ ;  
 e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 5n + 8}}{n - 5}$ ;  
 f.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 6n - 7}}{-8n^2 - 6n + 3}$ ;  
 g.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 6n - 2}{-3n^2 + 7n - 5}$ ;  
 h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-1} a_{j+1}^5 n^{j+1}}$ ,  $k > 2$ ,  $a_0, \dots, a_k$  — какие-то фиксированные ненулевые числа.

**Задача 4.** (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться

произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен  $x$ )? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ? Обязательно ли он равняется  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

- Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , где  $a \in \mathbb{R}$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ .
- Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ .
- Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , где  $a < 0$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ .
- Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , где  $a < -1$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , причем для всех натуральных  $n$ ,  $b_n \in \mathbb{Z}$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n})$ .

Следующие две задачи очень похожи. Задача 6 на наш взгляд несколько сложнее, чем 5. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

**Задача 5.** (20 баллов) Последовательность  $\{x_n\}$  задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{a + x_n}.$$

Пусть  $x_1 > 0$  и

- $a = 4$ ,  $b = 2$ ;
- $a = 2$ ,  $b = 4$ .

Докажите, что предел последовательности  $\{x_n\}$  существует и найдите его.

**Подсказка:** Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ , чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остается доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях  $x_1$  последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

**Задача 6.** (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2 + x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

**Подсказка:** последовательность  $\{x_n\}$  немонотонна. Рассмотрите последовательности  $\{x_{2n}\}$  и  $\{x_{2n+1}\}$ . Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел  $\{x_n\}$  также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.