

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №2

И. Щуров, М. Бекетов, В. Болбачан, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Пирогова Софья Александровна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в ту.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Style guide. Пожалуйста, пишите подробные доказательства всех утверждений со всеми необходимыми выкладками, логическими переходами и т.д. Решения должны представлять собой текст, который можно прочитать и понять, а не просто последовательность формул.

Задачи

Лемма 1. Если существует такое C , что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любых $n > N$, $|a_n - a| < C\varepsilon$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Задача 1. (15 баллов за каждый пункт.) Рассмотрим две последовательности $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$. Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, определённую следующим образом: первые 6 элементов $\{c_n\}$ это первые 6 элементов $\{a_m\}$, следующие 7 элементов $\{c_n\}$ это первые 7 элементов $\{b_k\}$, следующие 6 элементов $\{c_n\}$ это следующие 6 элементов $\{a_m\}$ (начиная с a_7), следующие 7 элементов $\{c_n\}$ это следующие 7 элементов $\{b_k\}$ (начиная с b_8) и так далее, процесс продолжается периодически, на каждом шаге из $\{a_m\}$ берутся очередные 6 элементов, а из $\{b_k\}$ очередные 7 элементов. Начало последовательности $\{c_n\}$ имеет вид:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, \dots$$

Пользуясь определением предела, докажите, что

- а. если пределы последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ существуют и совпадают (обозначим их за A), то предел последовательности $\{c_n\}$ также существует и равен A ;

- b. если пределы последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ существуют и не совпадают, то предел $\{c_n\}$ не существует,
 c. если предел хотя бы одной из последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ не существует, то предел $\{c_n\}$ также не существует.

Пользоваться какими-либо теоремами о пределах нельзя, только определением.

Задача 2. (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 3 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

- a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^7 + 3}}{7n^3 - 3}$;
 b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{7^n}$.
 c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1,5^n}{n!}$.
 d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2 + 5n)}{n}$.
 e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{(-1)^{n^7} \pi}{4}\right)$.

Задача 3. (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

- a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{8n^2 - 6n + 9} - \sqrt{8n^2 + 7n + 6})$;
 b. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 - 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 6})$;
 c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8^n + 2^{-5n}}{8^n + 4^{-4n}}$;
 d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{-4n}}{-5^n + 4^{-5n}}$;
 e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 5n - 6}}{5 - 5n}$;
 f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 6n - 7}}{8n^2 - 5n - 5}$;
 g. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 9}{-n^2 + 7n + 7}$;
 h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-3} a_{j+1} n^{j+3}}$, $k > 4$, a_0, \dots, a_k — какие-то фиксированные ненулевые числа.

Задача 4. (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться

произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен x)? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться ∞ , $+\infty$, $-\infty$? Обязательно ли он равняется ∞ , $+\infty$, $-\infty$? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

- Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$.
- Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.
- Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, где $a < 0$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.
- Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, где $0 > a > -1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, причем для всех натуральных n , $b_n \in \mathbb{Z}$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n})$.

Следующие две задачи очень похожи. Задача 6 на наш взгляд несколько сложнее, чем 5. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

Задача 5. (20 баллов) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{a + x_n}.$$

Пусть $x_1 > 0$ и

- $a = 9, b = 2$;
- $a = 2, b = 9$.

Докажите, что предел последовательности $\{x_n\}$ существует и найдите его.

Подсказка: Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$, чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остаётся доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях x_1 последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

Задача 6. (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 6 + \frac{1}{6 + x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

Подсказка: последовательность $\{x_n\}$ немонотонна. Рассмотрите последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$. Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел $\{x_n\}$ также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.