Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №2
И. Щуров, М. Бекетов, В. Болбачан, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Гвоздев Дмитрий Владиславович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Style guide. Пожалуйста, пишите подробные доказательства всех утверждений со всеми необходимыми выкладками, логическими переходами и т.д. Решения должны представлять собой текст, который можно прочитать и понять, а не просто последовательность формул.

Задачи

Лемма 1. Если существует такое C, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любых $n > N$, $|a_n - a| < C\varepsilon$, то
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Задача 1. (15 баллов за каждый пункт.) Рассмотрим две последовательности $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$. Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, определенную следующим образом: первые 2 элемента $\{c_n\}$ это первые 2 элемента $\{a_m\}$, следующие 3 элемента $\{c_n\}$ это первые 3 элемента $\{b_k\}$, следующие 2 элемента $\{c_n\}$ это следующие 2 элемента $\{a_m\}$ (начиная с a_3), следующие 3 элемента $\{c_n\}$ это следующие 3 элемента $\{b_k\}$ (начиная с b_4) и так далее, процесс продолжается периодически, на каждом шаге из $\{a_m\}$ берутся очередные 2 элемента, а из $\{b_k\}$ очередные 3 элемента. Начало последовательности $\{c_n\}$ имеет вид:
$$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, a_3, a_4, b_4, b_5, b_6, \ldots$$

Пользуясь определением предела, докажите, что

a. если пределы последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ существуют и совпадают (обозначим их за A), то предел последовательности $\{c_n\}$ также существует и равен A;

b. если пределы последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ существуют и не совпадают, то предел $\{c_n\}$ не существует,
c. если предел хотя бы одной из последовательностей $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$ не существует, то предел $\{c_n\}$ также не существует.

Пользоваться какими-либо теоремами о пределах нельзя, только определением.

Задача 2. (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 3 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n^7+4}}{6n^4-4}$;
b. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-6}\cdot(-1{,}7)^n$.
c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1{,}2^n}{n!}$.
d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2+5n)}{n}$.
e. $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\dfrac{(-1)^{n^5}\pi}{4}\right)$.

Задача 3. (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2+n+4}-\sqrt{9n^2+6n-6})$;
b. $\lim\limits_{n\to\infty} (-\sqrt{4n^2+3n-10}+\sqrt{4n^2+3n-3})$;
c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2^n+5^{-3n}}{2^n+8^{-4n}}$;
d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4^n+9^{-n}}{-6^n+6^{-3n}}$;
e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+n+9}}{4n-4}$;
f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2-3n+6}}{9n^2+2n+4}$;
g. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-4n+2}{-4n^2-7n-2}$;
h. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-2} a_{j+2}^2 n^{j+2}}$, $\quad k>3$, $a_0,\dots,a_k$ — какие-то фиксированные ненулевые числа.

Задача 4. (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен x)? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться ∞, $+\infty$, $-\infty$? Обязательно ли он равняется ∞, $+\infty$, $-\infty$? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

a. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n)$.
b. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$.
c. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, где $a > 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$.
d. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, где $a < -1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, причем для всех натуральных n, $b_n \in \mathbb{Z}$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} ({a_n}^{b_n})$.

Следующие две задачи очень похожи. Задача 6 на наш взгляд несколько сложнее, чем 5. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

Задача 5. (20 баллов) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{a + x_n}.$$

Пусть $x_1 > 0$ и

a. $a = 7$, $b = 2$;
b. $a = 2$, $b = 7$.

Докажите, что предел последовательности $\{x_n\}$ существует и найдите его.

Подсказка: Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остаётся доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях x_1 последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

Задача 6. (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2 + x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

Подсказка: последовательность $\{x_n\}$ немонотонна. Рассмотрите последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$. Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел $\{x_n\}$ также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.