Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021—22 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №1

И. Щуров, М. Бекетов, В. Болбачан, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Панфиленко Екатерина Андреевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, с ясно написанными рассуждениями, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, неразборчивое фото работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Аккуратно написанная от руки работа и аккуратно отсканированная не получает штрафов или бонусов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Style guide. Пожалуйста, пишите подробные доказательства всех утверждений со всеми необходимыми выкладками, логическими переходами и т.д. Решения должны представлять собой текст, который можно прочитать и понять, а не просто последовательность формул.

Задачи

Задача 1. (20 баллов.) Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную следующим образом:

$$a_0 = 2,\ a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 6a_{n-1} + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Докажите по индукции, что для любого натурального n, $a_n = (-2)^n + 3^n$.

Внимание! Проверьте, что ваша база индукции действительно позволяет запустить процесс индукции (по аналогии с «доказательством» метода математической индукции из лекции).

Задача 2. (15 баллов)

Докажите, пользуясь методом математической индукции, что в любом конечном множестве вещественных чисел есть максимальный элемент (то есть такой элемент множества, который был бы не меньше всех остальных элементов этого множества). Можно пользоваться неравенствами, но нельзя пользоваться функциями max и min от неопределенного количества аргументов.

Подсказка. Утверждение задачи можно сформулировать так: для всякого натурального n и всякого множества X, состоящего из вещественных чисел и имеющего n элементов, найдётся элемент $x \in X$, который будет не меньше всех остальных элементов этого множества.

Задача 3. (5 баллов за каждый пункт) Пусть X — множество пользователей некоторой социальной сети. Рассмотрим предикат $F(x, y)$, означающий «пользователь x подписан на обновления (т.е. фолловит) пользователя y».

Сформулируйте с помощью кванторов и предиката F следующие высказывания. Можно пользоваться конъюнкцией, дизъюнкией, импликацией, отрицанием. Ставить отрицания перед кванторами нельзя.

a. «Нет пользователя, который бы фолловил сам себя».
b. «Все пользователи подписываются на обновления тех, кто их фолловит (т.е. все пользователи фолловят взаимно)»
c. «Каждый пользователь хоть кого-то да фолловит»
d. «Есть пользователь, подписанный на обновления всех остальных»
e. «Есть пользователь, на обновления которого подписаны все остальные»

Задача 4. (10 баллов за каждый пункт.) Для последовательности $\{a_n\}$ сформулируйте утверждения с помощью кванторов. (Можно сформулировать любое утверждение, эквивалентное данному.) Разрешено использовать кванторы, числа, операции сравнения (больше, меньше, больше или равно, меньше или равно, равно, не равно), проверки принадлежности или непринадлежности элемента множествам натуральных, рациональных и вещественных чисел. Создавать другие множества нельзя. Знак отрицания использовать нельзя. Условия после кванторов использовать можно. Для каждого утверждения приведите пример последовательности, которая ему удовлетворяет, и пример последовательности, которая ему не удовлетворяет.

a. Все члены, начиная с некоторого, больше 2.
b. Лишь конечное число членов не равны 0.
c. Все члены, кроме конечного их числа, равны -4.
d. Бесконечно много членов не меньше -4.
e. Хотя бы один член не больше 0.

Задача 5. (10 баллов за каждый пункт.) Верны ли утверждения? (a и x — вещественные числа.) Привести необходимые доказательства.

a. $\exists a\ \forall x\colon (x > 1) \Rightarrow (3x^2 + ax \leqslant 0)$;
b. $\forall a\ \exists x\colon (x > 1) \Rightarrow (3x^2 + ax \leqslant 0)$;
c. $\forall a\ \exists x\colon (x > 1) \wedge (3x^2 + ax \leqslant 0)$;
d. $\forall x\ \exists a\colon (x > 1) \Rightarrow (3x^2 + ax \leqslant 0)$.

Задача 6. (10 баллов за каждый пункт.) Верно ли следующее утверждение для последовательности $\{x_n\}$,

$$x_n = \frac{2n+5}{5n^2}.$$

Докажите, не пользуясь никакими теоремами о пределах.

a. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : \quad |x_n - 0| < \varepsilon$;
b. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |x_n - 0| < \varepsilon$;
c. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |x_n - 0| < \varepsilon$;
d. $\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |x_n| > C$;
e. $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| < C$?