ФИО: ____.

Правила

Строго запрещено:
- переговариваться и как-либо общаться иными методами (с любой целью),
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа A4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

В ответах могут оставаться знаки арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень) и элементарные функции (синус, косинус, тангенс, экспонента, логарифм, корень целой степени). Указанных операций и функций должно быть конечное число.

Если не указано обратное, вы можете пользоваться всеми утверждениями, доказанными на лекциях или сформулированными на семинарах в качестве верных утверждений или задач.

Задач много, но пусть вас это не пугает — вероятно, их тут приведено с некоторым запасом.

Желаем удачи!

Задача 1. (7 баллов каждый пункт) Сходится ли ряд? Если да, найдите его сумму, если нет — докажите, что он расходится.

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+13n+40}$

b. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/3}\ln(5n)}$

Задача 2. (7 баллов каждый пункт) Найти неопределенный или определенный интеграл. Если определенный интеграл является несобственным, укажите это и исследуйте его сходимость. Если он расходится — докажите, если сходится — найдите его. При вычислении неопределенного интеграла не забывайте константу в ответе.

a. $\displaystyle\int \ln\frac{x-4}{x-6}\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^9 \ln\left|\frac{x-4}{x-6}\right|\,dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|2x-7|}\,dx$

Задача 3. (5 баллов) Найдите все вещественные и комплексные корни уравнения

$$z^3 - 6z^2 + 34z = 0.$$

Задача 4. (10 баллов) Найти частные производные по всем переменным для функции

$$F(x,y) = \int_{4x}^{2y} \cos\left(\sin\left(e^{3t}\right)\right)dt.$$

Задача 5. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(4\ln(\ln(4x^3 - 4\alpha x + e))).$$

Для всех значений вещественного параметра α найдите (конечно, α может входить в ответы):

a. область определения функции,

b. множество точек, на которых она непрерывна (докажите!),

c. её точки локальных максимумов или минимумов (если они есть; если нет — докажите, достаточно найти соответствующие значения x, значения y находить не нужно),
d. промежутки возрастания и убывания,
e. вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Задача 6. (15 баллов) Пусть функция f имеет $(n+1)$ непрерывную производную в некоторой окрестности точки x_0. Докажите, что в этом случае

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O((x-x_0)^{n+1})$$

при $x \to x_0$. Можно пользоваться всеми утверждениями, доказанными на лекциях и включенными в семинарские листочки в виде задач.

Задача 7. (20 баллов) Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $[3, +\infty)$, неотрицательна и невозрастает всюду, где определена, а также выпукла вниз. Докажите или опровергните следующее утверждение: интеграл

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_3^{+\infty} \left(f(\lfloor x \rfloor)(\lfloor x \rfloor + 1 - x) + f(\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor)\right) dx,$$

где $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

Задача 8. (15 баллов) Про функцию f известно, что $f(0) = 0$, что она дифференцируема в нуле и её производная в нуле равна 4. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ найти

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n f\left(\frac{x}{3^n}\right).$$