Коллоквиум по линейной алгебре

Факультет физики НИУ ВШЭ , первый курс

декабрь 2020 г.

Как проходит коллоквиум

Студент получает билет с двумя теоретическим вопросами. Вопросы оценваются из 4 баллов каждый. Студент отвечает оба теоретических вопроса, далее принимающий предлагает задачу, которая оценивается из 2 баллов. (Итого максимальная оценка за коллоквиум — 4+4+2=10 баллов). Ответ на вопрос билета должен быть изложен с полными доказательствами. На подготовку отводится 40 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя. По ходу сдачи принмающий может спросить любое из основных определений и формулировок, приведенных ниже.

Основные определения и теоремы

Векторное пространство, подпространство. Линейная зависимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис. Линейная оболочка. Линейное отображение. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений. Матрица линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения. Явная формула для определителя матрицы. Формулы для разложения определителя по строке и столбцу. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Диагонализуемый оператор. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Билинейная форма. Невырожденная билинейная форма. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональный оператор, его матрица.

Теоретические вопросы

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Существование обратного к комплексному числу. Формула Муавра.
2. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
3. Линейная зависимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис векторного пространства.
4. Ранг матрицы. Равенство строчного и столбцового рангов. Теорема Кронекера–Капелли.
5. Размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальная система решений.
6. Матрица линейного отображения. Действия с матрицами. Матрица композиции линейных отображений.

7. Ядро и образ линейного отображения конечномерных векторных пространств. Размерность образа равна рангу матрицы линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа.

8. Перестановки. Четность перестановки. Транспозиции.

9. Определитель матрицы: свойства, явная формула. Критерий равенства определителя нулю.

10. Определитель как полилинейная кососимметрическая функция, его единственность (с точностью до нормировки). Лемма об определителе с углом нулей.

11. Транспонированная матрица: $\det A = \det A^T$. Определитель произведения матриц. Разложение определителя по строке и по столбцу. Определитель Вандермонда. Формулы Крамера.

12. Обратимые матрицы. Эквивалентность обратимости и невырожденности. Метод поиска обратной матрицы (на выбор: при помощи метода Гаусса или алгебраических дополнений).

13. Линейный оператор. Преобразование линейного оператора при замене базиса. Независимость определителя матрицы линейного оператора от выбора базиса.

14. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, метод их поиска. Характеристический многочлен. Диагонализуемый оператор, достаточное условие диагонализуемости.

15. Корневое подпространство. Жорданова нормальная форма (без доказательства). Теорема Гамильтона-Кэли.

16. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональность. Любые ненулевые взаимно ортогональные векторы линейно независимы.

17. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Ортогональное дополнение.

18. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Ортогональные операторы. Канонический вид ортогонального оператора. Теорема Эйлера.

19. Симметрические операторы, их собственные значения. Канонический вид симметрического оператора.