Дополнительное домашнее задание

D.1. **а)** Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.
б) Применяя формулу понижения степени, получите выражение $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos 2\varphi$. Найдите выражение для $\cos(\frac{2\pi}{5})$ в радикалах от рациональных чисел.

D.2. Докажите, что ранг матрицы $(A|B)$, полученной приписыванием матрицы B к матрице A, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

D.3. Докажите, что каждая матрица ранга 1 размера $m \times n$ имеет вид $B^T \cdot C$, где $B = (b_1, \dots, b_m)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$.

D.4. Рассмотрим множество V функций вида $P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 2 с вещественными коэффициентами.
а) Покажите, что V — линейное пространство над $\mathbb{R}$.
б) Найдите какой-нибудь базис в этом пространстве.
в) Докажите, что отображение $\varphi((P(x))e^x) = \frac{d}{dx}(P(x)e^x)$ является линейным отображением $\varphi : V \to V$.
г) Найдите матрицу этого линейного отображения, где базис в обоих экземплярах V выбирается одинаково из пункта (б).

D.5. Рассмотрите отображение f из пространства V функций v вида $e^{2x}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 3 с вещественными коэффициентами, в пространство M многочленов степени не выше 2 с вещественными коэффициентами:

$$f(v) = e^{-2x}(v'' - 4v).$$

а) Докажите, что f — линейное отображение.
б) Рассмотрим в пространстве V набор векторов e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}. Докажите, что это базис пространства V.
в) Рассмотрим в пространстве M набор векторов 1, x, x^2. Докажите, что это базис пространства M.
г) Постройте в описанных выше базисах матрицу A отображения f.
д) Найдите пару базисов в пространствах V и M, в которых матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

D.6. а) Для $k \in \mathbb{N}$ вычислите H^k, где H — квадратная матрица размера $n \times n$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Для квадратной матрицы $J = \lambda E + H$ найдите J^k, здесь E — единичная матрица размера $n \times n$.

D.7. Существует ли квадратная матрица размера 2×2, для которой $A^3 \neq 0$, а $A^4 = 0$?

D.8. а) Пусть число инверсий в перестановке $(a_1, a_2, \ldots .a_n)$ равно k. Найдите число инверсий в перестановке $(a_n, a_{n-1}, \ldots .a_1)$.

б) Найдите сумму числа инверсий во всех перестановках из n элементов.

D.9. Обозначим A_n следующий определитель матрицы $n \times n$

$$A_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}_{(n\times n)}.$$

а) Вычислите A_1, A_2, A_3 и найдите рекуррентное соотношение для A_n, то есть выразите A_n через предыдущие (A_{n-1} и A_{n-2}).

б) Выведите или угадайте ответ для A_n и докажите его по индукции с помощью рекуррентного соотношения.