

Билинейные и квадратичные формы

12.1. Билинейная форма $b(x, y)$ в \mathbb{R}^3 задана формулой $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1)$. Найдите матрицу формы $b(x, y)$ в стандартном базисе. Является ли форма $b(x, y)$ симметричной?

12.2. Найти матрицу билинейной функции в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 \\ e'_2 &= e_1 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 - e_3 \\ e'_2 &= e_2 - e_3 \\ e'_3 &= -e_1 + e_2 - 3e_3 \end{aligned}$$

12.3. Найти симметрическую билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной функцией:

- а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$
б) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

12.4. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям. Для каждой квадратичной формы укажите ее сигнатуру.

- а) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
б) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$;
в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
г) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

12.5. Квадратичная форма $q(x)$ называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), если для всякого x , $q(x) \geq 0$ (соотв., $q(x) \leq 0$). Придумайте форму, которая является положительно полуопределенной, но не является положительно определенной.

12.6. Исследовать на знакоопределенность следующие формы

- а) $q(u) = u^T B u$, где $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
б) $q(u_1, u_2) = -u_1^2 - 5u_2^2 + 4u_1u_2$;
в) $q(u_1, u_2) = -u_1^2 - 5u_2^2 + 6u_1u_2$.

12.7. Найдите все значения параметра λ , при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

- а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.