

## Билинейные и квадратичные формы

**12.1.** Билинейная форма  $b(x, y)$  в  $\mathbb{R}^3$  задана формулой  $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1)$ . Найдите матрицу формы  $b(x, y)$  в стандартном базисе. Является ли форма  $b(x, y)$  симметричной?

**12.2.** Найти матрицу билинейной функции в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 \\ e'_2 &= e_1 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 - e_3 \\ e'_2 &= e_2 - e_3 \\ e'_3 &= -e_1 + e_2 - 3e_3 \end{aligned}$$

**12.3.** Найти симметрическую билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной функцией:

- а)  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$
- б)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

**12.4.** Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям. Для каждой квадратичной формы укажите ее сигнатуру.

- а)  $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ ;
- б)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$ ;
- в)  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ;
- г)  $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ .

**12.5.** Квадратичная форма  $q(x)$  называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), если для всякого  $x$ ,  $q(x) \geq 0$  (соотв.,  $q(x) \leq 0$ ). Придумайте форму, которая является положительно полуопределенной, но не является положительно определенной.

**12.6.** Исследовать на знакопредeterminedность следующие формы

- а)  $q(u) = u^T Bu$ , где  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- б)  $q(u_1, u_2) = -u_1^2 - 5u_2^2 + 4u_1u_2$ ;
- в)  $q(u_1, u_2) = -u_1^2 - 5u_2^2 + 6u_1u_2$ .

**12.7.** Найдите все значения параметра  $\lambda$ , при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

- а)  $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;
- б)  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ .