

## Симметрические и ортогональные операторы

11.1. а) Верно ли, что произведение двух симметрических матриц является симметрической?

б) Верно ли, что произведение двух ортогональных матриц является ортогональной?

11.2. а) Верно ли, что ортогональный оператор, действующий в пространстве  $V$ , где  $\dim V = 2$ , всегда имеет собственный вектор?

б) Верно ли, что ортогональный оператор, действующий в пространстве  $V$ , где  $\dim V = 3$ , всегда имеет собственный вектор?

в) Какие собственные значения может иметь ортогональный оператор?

11.3. Являются ли следующие матрицы ортогональными?

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.4. Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе симметрического оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

11.5. Найдите канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\text{а) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

11.6. Найдите все симметрические ортогональные матрицы размера 2 на 2.