

## Жорданова нормальная форма. Функции от матриц.

**9.1.** Найдите жорданову нормальную форму линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Укажите соответствующий базис, в котором матрица линейного оператора жорданова. Найдите минимальный многочлен линейного оператора.

**9.2.** Вычислите:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}.$$

**9.3.** Вычислите:

$$\begin{aligned} \text{а) } \exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & \quad \text{б) } \exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}; & \quad \text{в) } \sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix} \\ \text{г) } \exp \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; & \quad \text{д) } \exp \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; & \quad \text{е) } \exp \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**9.4.** Пусть

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Вычислите  $\exp(J(\lambda))$ .

**9.5.** Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y(t); \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + 5y(t); \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t); \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha y(t); \\ \dot{y}(t) = \alpha x(t). \end{cases}$$