

Линейные операторы

8.1. Найдите матрицу оператора:

- а) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^3 ;
 б) поворота плоскости на угол α в стандартном базисе плоскости \mathbb{R}^2 ;
 в) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, содержащей вектор $e_1 + e_2 + e_3$, в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^3 ;
 г) проектирования трехмерного пространства на ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе (e_1, e_2, e_3) ;
 д) проектирования на ось вектора e_1 вдоль вектора $e_1 + e_2$ в стандартном базисе плоскости \mathbb{R}^2 .

8.2. Найдите матрицу оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ (многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами) в базисе

- а) $(1, x, x^2, \dots, x^n)$; б) $(x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$; в) $(1, x - 1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-1)^n}{n!})$.

8.3. Пусть линейный оператор в пространстве V в базисе (e_1, \dots, e_4) имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе:

- а) (e_2, e_1, e_3, e_4) ; б) $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$;
 в) $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 + 2e_4, 2e_3 - e_4)$

8.4. Что происходит с матрицей оператора при перестановке базисных векторов?

8.5. Найдите собственные векторы и собственные значения операторов

- а) $\frac{d}{dx}$; б) $x \frac{d}{dx}$; в) $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

8.6. Найдите собственные значения и собственные векторы операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

- а) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8.7. Выясните, какие из следующих матриц можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису над \mathbb{R} или над \mathbb{C} . Если это возможно, найдите этот базис и соответствующий вид матрицы.

- а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.