Определители. Обратные матрицы. Формулы Крамера.

7.1. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

7.2. С помощью присоединенной матрицы найдите обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

7.3. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в A

а) переставить i-ую и j-ую строки;
б) к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на число λ;
в) умножить i-ую на строку на число $\lambda \neq 0$;
г) преобразования а)-в) совершить по столбцам.

7.4. Решите матричные уравнения

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; **в)** $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; **д)** $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

7.5. Решите системы, пользуясь правилом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 16x_2 = 17; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

7.6. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A+B)^T = A^T + B^T$; **б)** $(AB)^T = B^T A^T$; **в)** $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
г) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, где A и B — матрицы $n \times n$, а λ – число.

7.7. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.