Действия над матрицами

5.1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **в)** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\alpha & \mathrm{sh}\,\alpha \\ \mathrm{sh}\,\alpha & \mathrm{ch}\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\beta & \mathrm{sh}\,\beta \\ \mathrm{sh}\,\beta & \mathrm{ch}\,\beta \end{pmatrix}$.

Здесь $\mathrm{sh}\,\alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$, $\mathrm{ch}\,\alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$. Это *гиперболические синус* и *косинус*.

5.2. Рассмотрим линейное отображение $\varphi : V \to U$. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве V, а f_1, f_2, f_3, f_4 — базис в пространстве U. Известно, что

$$\varphi(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4; \quad \varphi(e_2) = f_3 - f_4; \quad \varphi(e_3) = 2f_2 + f_3.$$

а) Чему равно $\varphi(e_1 + e_2 + e_3)$?
б) Чему равно $\varphi(2e_1 - 3e_2 + 4e_3)$?
в) Запишите матрицу линейного отображения φ в заданных базисах.
г) Найдите ядро $\mathrm{Ker}\,\varphi$ и образ $\mathrm{Im}\,\varphi$ отображения φ, укажите их размерность и найдите базис в этих подпространствах.

5.3. Рассмотрим линейные отображения $\varphi : V \to U$ и $\psi : W \to V$. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве V, а f_1, f_2, f_3, f_4 — базис в пространстве U, а g_1, g_2, g_3 — базис в пространстве W. Известно, что

а) $\varphi(e_1) = f_1 - 3f_2 - f_3 + f_4$; $\varphi(e_2) = 2f_2 + f_3 - 3f_4$; $\varphi(e_3) = f_2 - f_3$;
$\psi(g_1) = e_3$; $\psi(g_2) = -e_1 + e_2$; $\psi(g_3) = e_1 + 2e_2$.

б) $\varphi(e_1) = 2f_1 - 3f_2 + f_3$; $\varphi(e_2) = -f_2 + 3f_3 + f_4$; $\varphi(e_3) = f_2 + f_3 - f_4$; а
$\psi(g_1) = 2e_1 - e_3$; $\psi(g_2) = -e_1 + 2e_2$; $\psi(g_3) = e_1 + 2e_2 + e_3$.

Найдите $(\varphi\psi)(g_i)$ для $i = 1, 2, 3$. Выпишите матрицы отображений φ, ψ и $\varphi\psi$ в соответствующих базисах. Как должны быть связаны эти матрицы согласно теореме о композиции линейных отображений?

5.4. Опишите ядро и образ линейного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданного следующей матрицей, явно указав в них базисы.

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

5.5. Найдите матрицу, обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; **з)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.