

Векторные пространства. Линейная зависимость. Базис.

3.1. Выясните, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

- а) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 6, 7)$ в \mathbb{R}^3 ;
- б) $v_1 = (2, -3, 1), v_2 = (3, -1, 5), v_3 = (1, -4, 3)$ в \mathbb{R}^3 ;
- в) $v_1 = (5, 4, 3), v_2 = (3, 3, 2), v_3 = (8, 1, 3)$ в \mathbb{R}^3 ;
- г) $v_1 = (4, -5, 2, 6), v_2 = (2, -2, 1, 3), v_3 = (6, -3, 3, 9), v_4 = (4, -1, 5, 6)$ в \mathbb{R}^4 ;
- д) $v_1 = (1, 0, 0, 2, 5), v_2 = (0, 1, 0, 3, 4), v_3 = (0, 0, 1, 4, 7), v_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$ в \mathbb{R}^5 .

3.2. Найдите все значения λ , при которых вектор w линейно выражается через v_1, v_2, v_3 в \mathbb{R}^3 :

- а) $v_1 = (2, 3, 5), v_2 = (3, 7, 8), v_3 = (1, -6, 1), w = (7, -2, \lambda)$;
- б) $v_1 = (4, 4, 3), v_2 = (7, 2, 1), v_3 = (4, 1, 6), w = (5, 9, \lambda)$;
- в) $v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7), v_3 = (15, 20, 11), w = (9, 12, \lambda)$;
- г) $v_1 = (3, 2, 5), v_2 = (2, 4, 7), v_3 = (5, 6, \lambda), w = (1, 3, 5)$;
- д) $v_1 = (3, 2, 6), v_2 = (5, 1, 3), v_3 = (7, 3, 9), w = (\lambda, 2, 5)$.

3.3. Является ли векторным пространством над \mathbb{R}

- а) множество векторов (x, y) из \mathbb{R}^2 с условием $x^2 + y^2 < 1$;
- б) множество векторов (x, y) из \mathbb{R}^2 , лежащих в первой четверти (т.е. $x, y \geq 0$);
- в) множество многочленов степени 3 от одной переменной с вещественными коэффициентами;
- г) множество многочленов степени не выше 3 от одной переменной с вещественными коэффициентами, у которых отсутствует моном первой степени?

3.4. Является ли базисом

- а) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ в \mathbb{R}^3 ;
- б) $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ в \mathbb{R}^3 ;
- в) $\{(x+1), (x+1)^2\}$ в пространстве многочленов степени не выше 2;
- г) $\{1, (x+1), (x+1)^2\}$ в пространстве многочленов степени не выше 2?

3.5. а) При каких a множество векторов (x_1, x_2) в \mathbb{R}^2 , удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 = a - 1$ является подпространством?

б) При каких a множество векторов (x_1, x_2, x_3) в \mathbb{R}^3 , удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = a - 1 \end{cases}$$

является подпространством?

3.6. Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразите через этот базис остальные векторы системы:

- а) $v_1 = (5, 2, -3, 1)$, $v_2 = (4, 1, -2, 3)$, $v_3 = (1, 1, -1, 2)$, $v_4 = (3, 4, -1, 2)$, $v_5 = (7, -6, -7, 0)$;
б) $v_1 = (2, -1, 3, 5)$, $v_2 = (4, -3, 1, 3)$, $v_3 = (3, -2, 3, 4)$, $v_4 = (4, -1, -15, 17)$;
в) $v_1 = (1, 2, 3, -4)$, $v_2 = (2, 3, -4, 1)$, $v_3 = (2, -5, 8, -3)$, $v_4 = (5, 26, -9, -12)$,
 $v_5 = (3, -4, 1, 2)$;
г) $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (3, 1, -5)$, $v_3 = (4, 2, -1)$, $v_4 = (1, 0, -7)$.

3.7. Найдите базис линейной оболочки векторов $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Какова размерность V ? Если $\dim V < 4$, то найденную линейно независимую систему векторов дополните до базиса в \mathbb{R}^4 .

- а) $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 6, 0, 0)$, $v_4 = (-2, -4, -6, -8)$;
б) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 3, 4, 5)$, $v_3 = (3, 4, 5, 6)$, $v_4 = (4, 5, 6, 7)$;
в) $v_1 = (2, 1, -3, 1)$, $v_2 = (2, 2, -6, 2)$, $v_3 = (6, 3, -9, 3)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$;

3.8. Пусть векторы v_1, \dots, v_k линейно независимы. Выясните, будут ли линейно независимыми векторы:

- а) $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$, $w_3 = v_1 + v_2 + v_3, \dots, w_k = v_1 + \dots + v_k$;
б) $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_3 + v_4, \dots, w_{k-1} = v_{k-1} + v_k$, $w_k = v_k + v_1$.