

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Дифференциальные уравнения

Final

И. Щуров, М. Матушко

## Правила

**Open book.** Вы можете пользоваться любыми печатными источниками, но не можете пользоваться какими-либо устройствами (кроме этапа сканирования) и никаким образом обсуждать настоящую работу с какими-либо живыми людьми до момента её сдачи.

**Solutions.** В вашем решении должны быть отражены все логические переходы и обоснования, необходимые для того, чтобы убедиться в корректности решения (что все найденные ответы верные, других ответов нет и т.д.) Арифметические вычисления можно не приводить, но все алгебраические преобразования должны быть приведены. Ответы должны быть доведены до максимально простой формы.

**Academic ethic.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

## Задачи

**Задача 1.** Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для всех возможных значений параметра  $a \in \mathbb{R}$ :

- (15 баллов) Определить тип особой точки (седло / узел / вырожденный узел / дикритический узел / фокус / центр / вырожденная особая точка).
- (5 баллов) Определить, является ли особая точка асимптотически устойчивой, устойчивой по Ляпунову, не является асимптотически устойчивой, не является устойчивой по Ляпунову. (Можно использовать без доказательства корректные утверждения про устойчивость по Ляпунову линейных особых точек различных типов.)
- (10 баллов) Для каждого из различных типов линейной особой точки, возникающих при изменении параметра  $a$ , нарисовать эскиз фазового портрета системы. На эскизе должны быть корректно отмечены все особые точки, наличие/отсутствие сепаратрис, наличие/отсутствие направлений, которых касаются другие траектории при приближении к особой точке, касание траекторий, закручивание (включая его направление). На траекториях должны быть нарисованы стрелочки, показывающие направление движения. Находить явно направления касательных или сепаратрис, диагонализующие или нормализующие координаты не требуется.

**Задача 2.** (20 баллов) Рассмотрим особую точку  $(0, 0, 0)$  следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 8y + 2z \\ \dot{y} = 7z \\ \dot{z} = x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Является ли она устойчивой по Ляпунову, асимптотически устойчивой, неустойчивой по Ляпунову, асимптотически неустойчивой? Ответ обосновать.

**Задача 3.** (20 баллов) Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(4x^2 + y^2) - x - 2y \\ \dot{y} = 8x + y(4x^2 + y^2) - y \end{cases}$$

Найти уравнение предельного цикла (в виде неявной функции, то есть задать такую функцию  $F(x, y)$ , что все точки, принадлежащие предельному циклу, удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$ , и только они), либо доказать, что его не существует.

**Задача 4.** (15 баллов) Найти все решения системы

$$\dot{x} = 7y, \quad \dot{y} = 7x + e^{7t}.$$

**Задача 5.** (20 баллов) Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 \\ 8 & -12 & 0 \\ -8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Доказать или опровергнуть следующее утверждение: у этой системы существуют два независимых (во всех точках, кроме быть может некоторой прямой в трёхмерном пространстве) первых интеграла.

**Задача 6.** (20 баллов) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \log(3x + 10y + 1), \quad \dot{y} = \log(-5x - 12y + 1).$$

Пусть  $(x(t), y(t))$  — решение этой системы, причём известно, что предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t))$  равен  $(0, 0)$ . Чему может равняться значение выражения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/x(t)?$$