

ФИО: _____.

Правила

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

Желаем удачи!

Задача 1. (5 + 5 баллов) Верно ли утверждение? Если да, докажите. Если нет, постройте отрицание и докажите отрицание.

- $\forall x \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{R} : c + x^2 - 3x < 0.$
- $\forall c \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : c + x^2 - 3x < 0.$

Задача 2. (10+10 баллов) Найти предел, пользуясь определением предела последовательности или определением предела функции (по Коши или по Гейне). Если предел не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности, плюс бесконечности, минус бесконечности, докажите это. (Если предел равен бесконечности, но не равен плюс или минус бесконечности, доказывать, что он не равен плюс или минус бесконечности, не требуется.) Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно пользоваться неравенством Бернулли.

- Предел функции: $\lim_{x \rightarrow -4} |-2x - 8|.$
- Предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 6}{3n - 5}.$

Задача 3. (20 баллов) Пусть про последовательность $\{a_n\}$ известно, что все её члены положительны и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 7.$$

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

если он существует. Если он не существует и при этом равен бесконечности, докажите это. Если не существует и не равен бесконечности, тоже докажите. Если возможны разные варианты ответа, приведите примеры для каждого, и докажите, что других нет.

Никакими фактами про пределы пользоваться нельзя, только определением. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно пользоваться неравенством Бернулли.

Задача 4. (15 баллов) Функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки -3 и про неё известно, что

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 6.$$

Найти

$$\lim_{x \rightarrow -3} xf(x).$$

Никакими фактами о пределах пользоваться нельзя, только определением.

Задача 5. (15 + 15 баллов) Исследовать функцию.

- Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.)
- Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода).

- Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке?
- Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
- Является ли функция ограниченной на своей области определения?

Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

а. Функция задана формулой

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{8x^2 + 4}{x - 5},$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

б. Функция задана формулой

$$f(x) = \sin \frac{1}{x^2 - 6x + 8}.$$

Задача 6. (20 баллов) Рассмотрим функцию f , определённую на интервале $(-4, 4)$. Про неё известно, что

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty,$$

а также что она непрерывна на $(-4, 4)$.

Обязательно ли она является сюръективной? Если да, докажите. Если нет, приведите контр-пример, и докажите, что он подходит.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в виде утверждений или задач.

(Напоминание: отображение $g: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным* если для всякого $y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $g(x) = y$.)