ФИО: ____.

Правила

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа A4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную следующим образом:

$$a_0 = 2,\ a_1 = -3$$
$$a_{n+1} = 10a_{n-1} - 3a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Докажите по индукции, что для любого натурального n, $a_n = (-5)^n + 2^n$.

Задача 2. (15 баллов) Пусть функция f определена на всей числовой оси и справедливо утверждение (здесь A и C — вещественные числа):

$$\forall C \neq 0 \, \exists A \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon x^8 > A^4 \Rightarrow (f(x))^4 < C^8$$

Найдите

$$\lim_{x \to \infty} f(x),$$

если этот предел существует (и докажите, что он такой). Если этот предел равен бесконечности, докажите это. Пользоваться можно только определением предела (по Коши или по Гейне) и алгебраическими преобразованиями, никакими теоремами о пределах и т.д. пользоваться нельзя. Можно пользоваться тем фактом, что корень произвольной натуральной степени определен для всех положительных чисел и монотонно возрастает.

Задача 3. (10 + 15 баллов) Угадать предел и доказать, что он действительно такой, пользуясь только определением предела и алгебраическими преобразованиями. Никакими теоремами о свойствах пределов, непрерывностью функций, логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли. Найти явно (можно оставить ответ в виде числового выражения, содержащего арифметические операции, функции типа минимума или максимума и т.д.) значение δ или N из определения предела, соответствующее значению $\varepsilon = 1/10$.

a. Предел функции: $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{4x-4}$.

b. Предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+2}{4n} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Задача 4. (10 + 10 баллов) Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x, при которых выражение, заданное формулой, определено.) Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

a. $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{x^2 - 3x}$.

b. $f(x) = \exp\left(\frac{x}{|x|}(-3x+3)\right) + 2x$

Задача 5. (10 + 10 баллов) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $I = [0, 2]$. Рассмотрим образ отрезка I под действием f, то есть множество всевозможных значений $f(x)$, где x — любая точка I:

$$f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Докажите, что существует такая точка $c \in I$, что $f(c) = c$, если

a. $f(I) \subseteq I$ (то есть $f(I)$ является подмножеством I).

b. $f(I) \supseteq I$(то есть I является подмножеством $f(I)$).

Задача 6. (20 баллов) Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 = -1$ и существует предел

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -1.$$

Пусть функция g определена в некоторой окрестности точки -1 и *не является* непрерывной в этой точке, хотя и имеет в ней предел. Пусть также известно, что

$$\lim_{x \to -1} g(f(x)) = \lim_{y \to -1} g(y).$$

Доказать или опровергнуть следующее утверждение: обязательно найдётся такая проколотая окрестность $\mathring{U}$ точки -1, что для всех $x \in \mathring{U}$, $f(x) \neq -1$.