ФИО: ____.

Правила

Строго запрещено:
- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа A4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Верно ли утверждение? Если да, докажите его. Если нет, запишите отрицание (таким образом, чтобы знак отрицания не стоял перед квантором) и докажите отрицание. Все переменные принадлежат $\mathbb{R}$.

a. $\exists v\, \forall q\colon qv + 3 > q$.

b. $\exists v\, \forall q\colon qv + 3 < q$.

Задача 2. (10 баллов) Угадать предел последовательности и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{49 + \frac{1}{-9n+8}}$$

Задача 3. (10 баллов) Угадать предел функции и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции (по Коши, с эпсилонами и дельтами). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

$$\lim_{x \to -6} \frac{x-4}{x+6}$$

Задача 4. (10 + 10 баллов). Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x, при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, полюс, существенный разрыв). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

a. $f(x) = \exp \dfrac{1}{(x+9)(x+3)^2}$.

b. $f(x) = \dfrac{-9x^9 + 5^{-x}}{x^8 + 4 \cdot 6^{-x}}$.

Задача 5. (15 баллов) Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[-1, 8]$. Верно ли, что функция

$$h(x) = \min(f(x), g(x))$$

также является непрерывной на отрезке $[-1, 8]$? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

Задача 6. (5 + 15 баллов) В этой задаче можно пользоваться всеми утверждениями, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в виде задач. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$ и всюду монотонно возрастает (то есть для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$). Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{3n+6} - 4\right) = -2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

$$\lim_{x\to-4} f(x) = -2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

a. Верно ли, что из (2) следует (1)? Докажите.

b. Верно ли, что из (1) следует (2)? Докажите.