Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №4
Фамилия и имя студента: Петухов Виктор Максимович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов за каждый пункт) Исследовать интеграл. Если он собственный, найти его. Если несобственный, исследовать сходимость. Если сходится, найти его, если расходится — доказать, что расходится.

a. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{3x+4}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^\pi e^{\cos(x)}\sin(2x)\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x)\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx$

f. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

g. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

h. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

i. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

Задача 2. (15 баллов) Доказать, что

$$3\sqrt{2} \leqslant \int_1^4 \sqrt{x^3+1}\,dx \leqslant \frac{267}{4}$$

Задача 3. (15 баллов) Функция $\Phi(x)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Выразить следующий интеграл через Φ:

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{32}}\,dx.$$

(Сейчас выглядит страшновато, но на теорвере пригодится.)

Задача 4. (20 баллов) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в некоторой точке $c \in (a,b)$, $f(c)=0$ и существует производная $f'(c)$. Предположим также, что в некоторой окрестности c нет других корней f. Докажите, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

расходится.