Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №5
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Сендова Анастасия Алексеевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов) Найти все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6ax + 9a + 3x - 9, & x \leqslant 3 \\ 4x^2 - 21x + 27, & x > 3 \end{cases}$$

имеет первую производную в точке 3, но не имеет второй.

Задача 2. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|4x-16|}\right), & x \neq 4 \\ 0, & x = 4. \end{cases}$$

Докажите, что эта функция является дифференцируемой в точке 4 сколько угодно раз, найдите все её производные в этой точке и выпишите её ряд Тейлора в этой точке ($x_0 = 4$). Сходится ли ряд Тейлора к функции, то есть верно ли, что для всех x,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x),$$

где $T_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n? Почему это не противоречит теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано? В форме Лагранжа?

Задача 3. (10 баллов за каждый пункт) Найти предел

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3 + 2x\cos(2x) - 2x}{64x^4 - \frac{64x^3}{3} + 8x^2 - 4x + \ln(4x+1)}$;

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x + \sin(2x^2 + 3x)}{-5x + e^{2x^2+5x} - 1}$.

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она дважды дифференцируема для $x \geqslant 0$, $f(0) = -4$ и $f'(0) = 3$ и $f''(x) > 6$ для всех $x \geqslant 0$. Докажите, что для всех $x > 0$, $f(x) > 3x^2 + 3x - 4$.