**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год**
**Математический анализ — 1**
**Домашнее задание №3**
*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*
**Фамилия и имя студента: Шамсуддинов Руслан Рамилевич**

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где $x_0$ — оценка без учёта штрафа, $t$ — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (c) и (f), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

a. $f(x) = -8x^3 + 24x^2 - 18x + 2$;
b. $f(x) = \frac{4x^2+16x+17}{-2x-4}$;
c. $f(x) = \sin(\ln(4x^2 - 8x + 7))$;
d. $f(x) = 4x^2 + 2x + \ln(2x + 2) - 2$;
e. $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$;
f. $f(x) = \exp\left(\frac{-2x-3}{-4x^2-12x-8}\right)$.

**Задача 2.** (10 + 5 баллов) Рассмотрим функции $f(x) = \lambda x + \cos(2x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторый вещественный параметр, и $g(t) = 2 - e^{-2e^{2t}}$. Пусть $h(x) = g(f(x))$, областью определения $h$ являются все вещественные числа.

a. При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $h$ обратима?
b. Пусть $\lambda = 3$ и $h^{-1}(y)$ — обратная функция. Найти значение производной $(h^{-1}(y))'$ в точке $y_0 = -\frac{1}{e^{2e^2}} + 2$.

**Задача 3.** (5 + 10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^{11} = e^{-x} + 2\sin\left(\frac{x}{9} - \frac{4}{9}\right)$$

a. есть корень;
b. он ровно один.

*Подсказка к пункту (b).* Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях $x$.

**Задача 4.** (10 баллов) Про функцию $f$ известно, что она определена на отрезке $[1, 4]$, непрерывна на этом отрезке, дифференцируема во всех точках интервала $(1, 4)$ и $f(1) = -3$. Также известно, что для всех $x \in (a, b)$

$$f'(x) \geqslant -7.$$

Докажите, что

$$f(4) \geqslant -24.$$

**Задача 5.** (10 + 5 баллов) Пусть функция $f$ определена на некотором отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и строго выпукла вверх.

a. Докажите, что у этой функции существует локальный максимум, причём он единственный и является глобальным максимумом. Производными пользоваться нельзя — не факт, что они существуют.
b. Справедливо ли утверждение предыдущего пункта, если в условии заменить отрезок $[a, b]$ на интервал $(a, b)$? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Если вы используете какие-то теоремы из лекций, пожалуйста, ссылайтесь на них явно.

 Фамилия и имя студента: Шамсуддинов Руслан Рамилевич