

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Лопатин Герман Дмитриевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в ту.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (с) и (f), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

a. $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2$;

b. $f(x) = \frac{4x^2 - 16x + 17}{2x - 4}$;

c. $f(x) = \sin(\ln(4x^2 + 4x + 3))$;

d. $f(x) = 4x^2 + 6x + \ln(2x + 3)$;

e. $f(x) = e^{-4x^2 + 8x - 4}$;

f. $f(x) = \exp\left(\frac{2x+1}{-4x^2-4x}\right)$.

Задача 2. (10 + 5 баллов) Рассмотрим функции $f(x) = \lambda x + \cos(3x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторый вещественный параметр, и $g(t) = -e^{2t^3+4t} + 3$. Пусть $h(x) = g(f(x))$, областью определения h являются все вещественные числа.

a. При каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ функция h обратима?

b. Пусть $\lambda = 4$ и $h^{-1}(y)$ — обратная функция. Найти значение производной $(h^{-1}(y))'$ в точке $y_0 = -e^6 + 3$.

Задача 3. (5 + 10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^3 = e^{-x} + 4 \sin\left(\frac{x}{14} + \frac{1}{14}\right)$$

- а. есть корень;
- б. он ровно один.

Подсказка к пункту (б). Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях x .

Задача 4. (10 баллов) Про функцию f известно, что она определена на отрезке $[0, 3]$, непрерывна на этом отрезке, дифференцируема во всех точках интервала $(0, 3)$ и $f(0) = 2$. Также известно, что для всех $x \in (a, b)$

$$f'(x) \geq -2.$$

Докажите, что

$$f(3) \geq -4.$$

Задача 5. (10 + 5 баллов) Пусть функция f определена на некотором отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и строго выпукла вниз.

- а. Докажите, что у этой функции существует локальный минимум, причём он единственный и является глобальным минимумом. Производными пользоваться нельзя — не факт, что они существуют.
- б. Справедливо ли утверждение предыдущего пункта, если в условии заменить отрезок $[a, b]$ на интервал (a, b) ? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Если вы используете какие-то теоремы из лекций, пожалуйста, ссылайтесь на них явно.