

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Дахнович Александр Андреевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF.

Задачи

Задача 1. (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$.

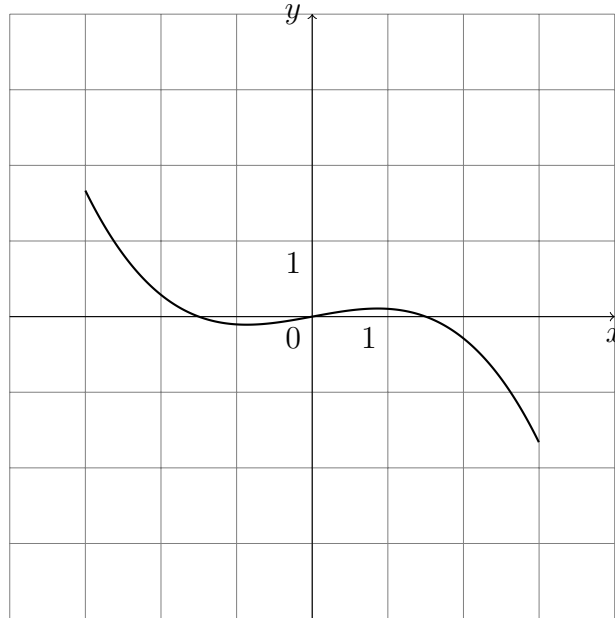


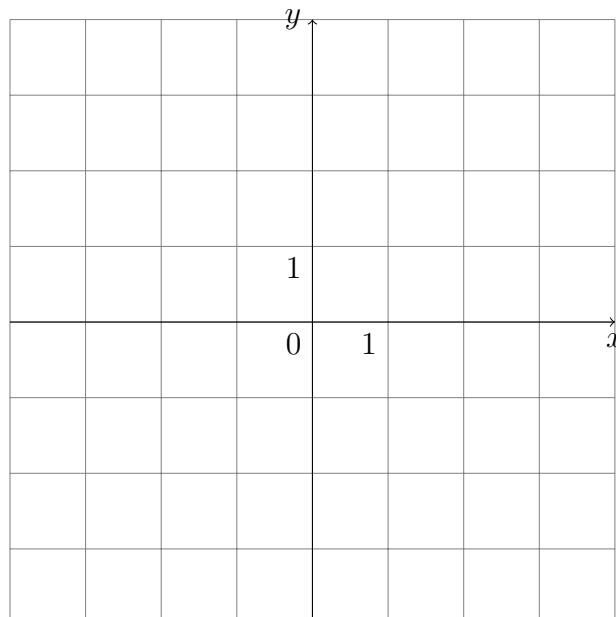
Рис. 1: Рисунок к задаче 1

а. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

б. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 1$. Чему равно $g(0)$? $g(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $g(x)$ и $f(x)$?

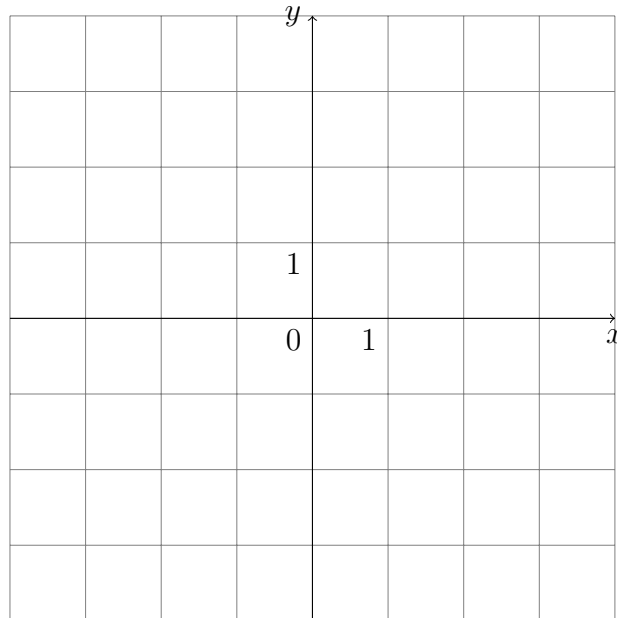
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

c. Рассмотрим функцию $h(x) = 2f(x)$; Чему равно $h(0)$? $h(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $h(x)$?

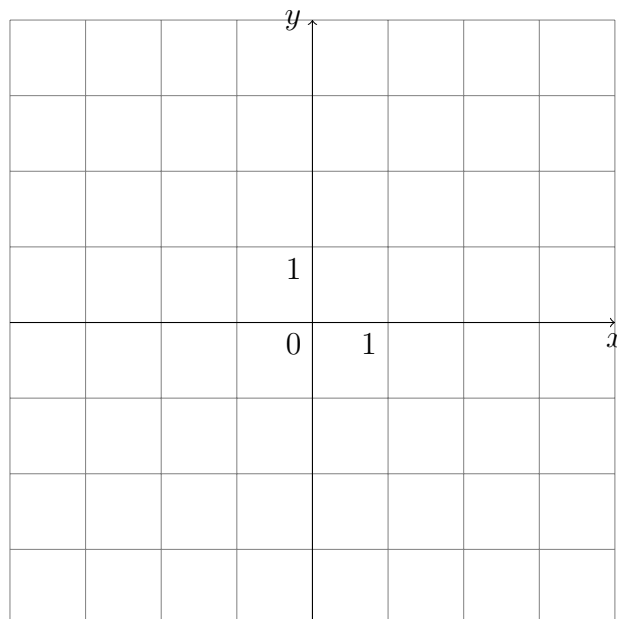
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

d. Рассмотрим функцию $u(x) = f(x + 1)$; Чему равно $u(0)$? $u(-1)$? $u(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $u(x)$?

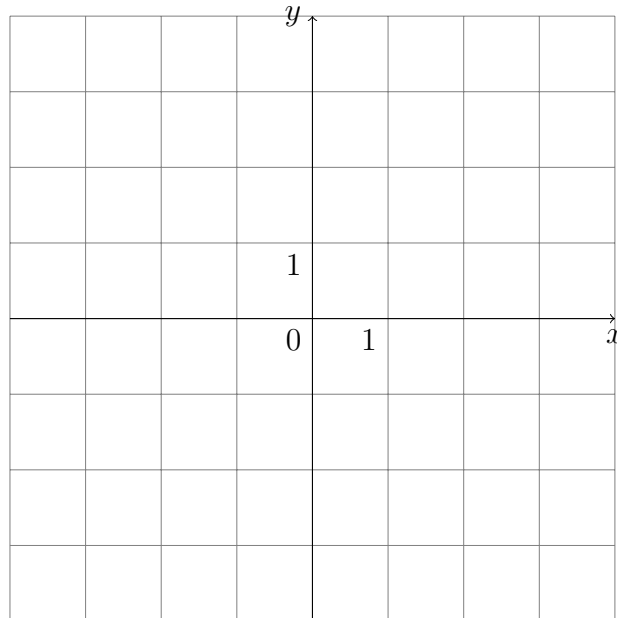
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|
| x | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $u(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

е. Рассмотрим функцию $v(x) = f(2x)$; Чему равно $v(0)$? $v(1)$? $v(0,5)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $v(x)$?

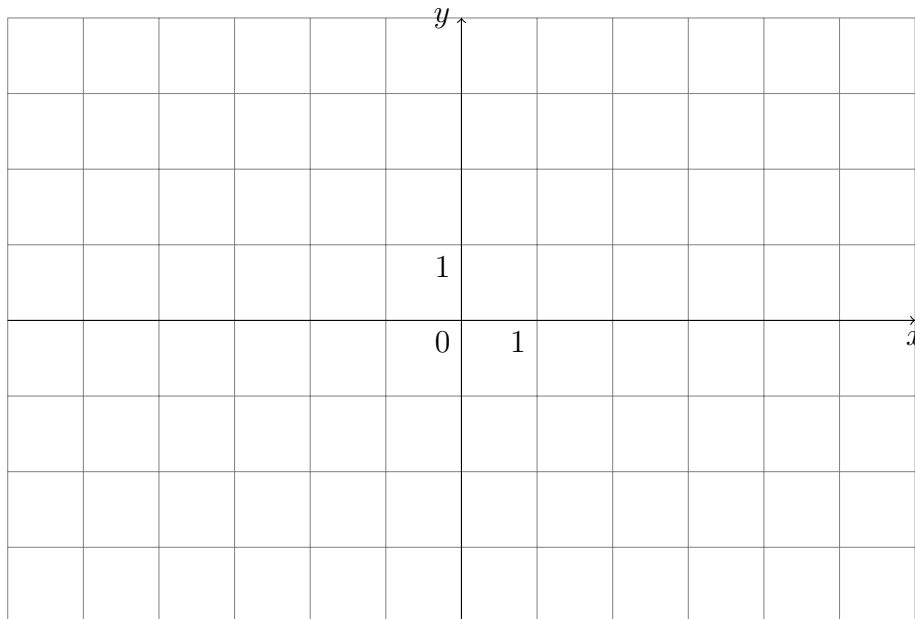
| | | | | | | | |
|--------|------|----|------|---|-----|---|-----|
| x | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
| $v(x)$ | | | | | | | |



Ответ:

ф. Рассмотрим функцию $z(x) = f(x/2)$; Чему равно $z(0)$? $z(1)$? $z(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $z(x)$?

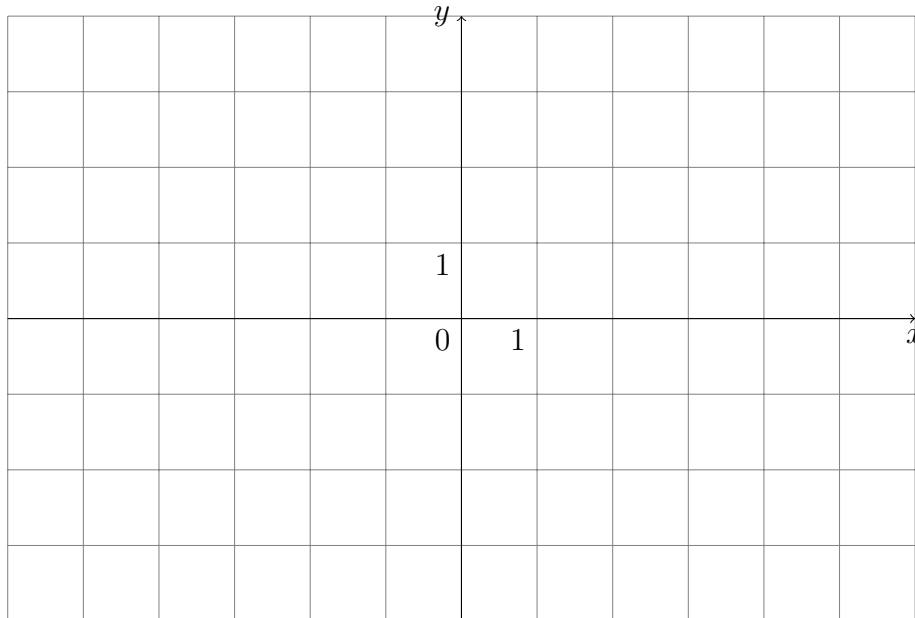
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $z(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

g. Рассмотрим функцию $m(x) = |f(x)|$; Чему равно $m(0)$? $m(1)$? $m(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $m(x)$?

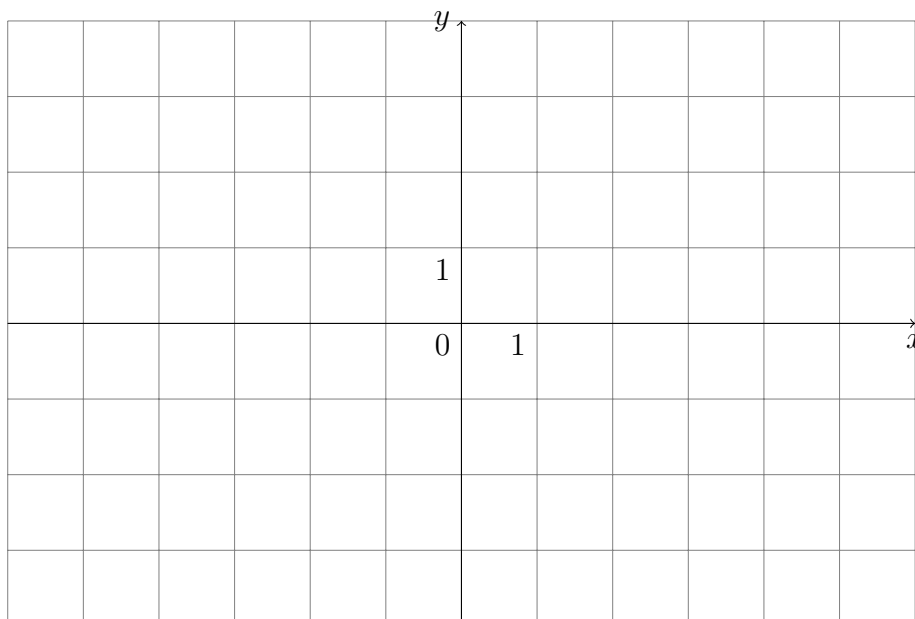
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

h. Рассмотрим функцию $r(x) = f(|x|)$; Чему равно $r(0)$? $r(1)$? $r(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $r(x)$?

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |



Ответ:

Задача 2. (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(2x + 4)$.

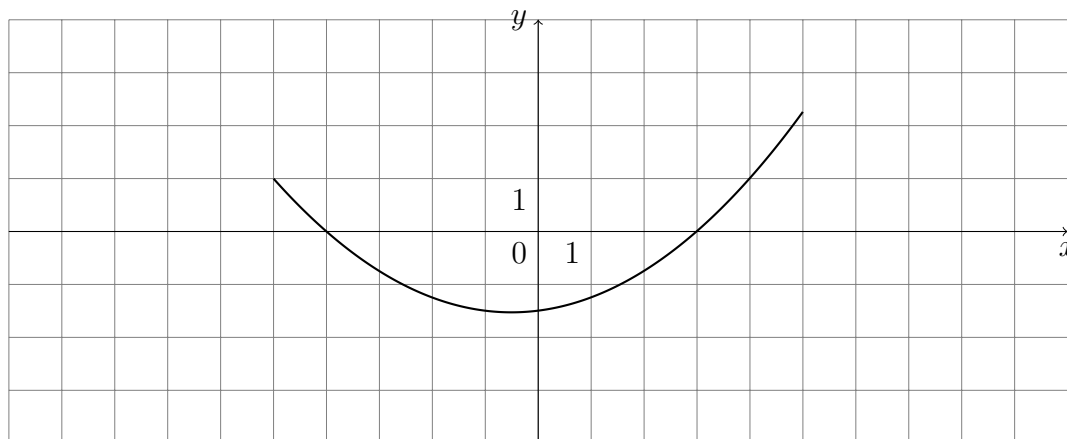


Рис. 2: Рисунок к задаче 2

- Найти область определения функции $g(x)$.
- Найти значение функции $g(x)$ в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
- Построить график $g(x)$.
- Описать словами, что надо сделать с графиком функции $f(x)$, чтобы получить график функции $g(x)$. Какие точки при этом преобразовании остаются на месте?

Решение:

Задача 3. (10 баллов) Пусть функция f определена в проколотовой окрестности точки $x = -4$. Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -2 \quad (1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -2 \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -2 \right) \quad (2)$$

Докажите, пользуясь определением пределов по Коши, что утверждения (1) и (2) эквивалентны. Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

Задача 4. (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками ∞ , $+\infty$ и $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \infty.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

Задача 5. (18 баллов) Угадать предел функции и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции (по Коши, с эпсилонками и дельтами). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

a. $\lim_{x \rightarrow 3} x^4$;

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-7}{x+2}$.

Задача 6. (15 баллов) Вычислите предел функции или докажите, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можно пользоваться всеми фактами о пределах, которые обсуждались на лекциях или были включены в семинарские листочки в виде утверждений или задач. Если пользуетесь каким-то утверждением, давайте на него ссылку.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} 13^{-n}(n \ln n - n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x}{e^{2x}}$.

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3+1}(n^3 + 3n \cos n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача 7. (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

и

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = -\infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(f(x)) = -\infty.$$

Задача 8. (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -\sqrt{4e^{\frac{7}{x+1}} + 1}$$

Задача 9. (10 + 10 баллов). Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

а. $f(x) = \exp \frac{1}{(x-9)(x-6)^2}$.

б. $f(x) = \frac{3x^5 + 6^{-x}}{x^4 + 3 \cdot 7^{-x}}$.