

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №3

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Башелханов Дмитрий Михайлович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF.

Задачи

Задача 1. (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$.

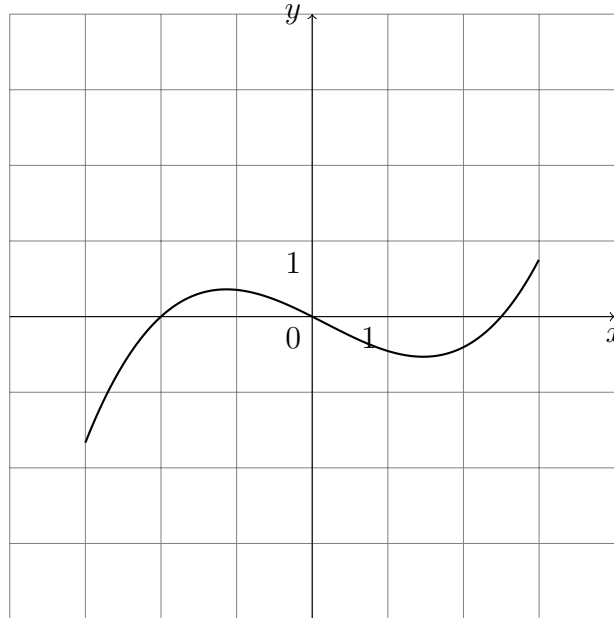


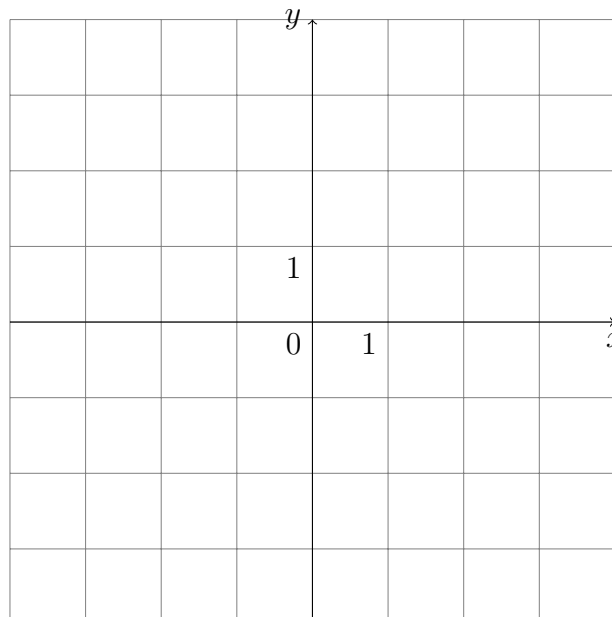
Рис. 1: Рисунок к задаче 1

а. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$													

б. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 1$. Чему равно $g(0)$? $g(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $g(x)$ и $f(x)$?

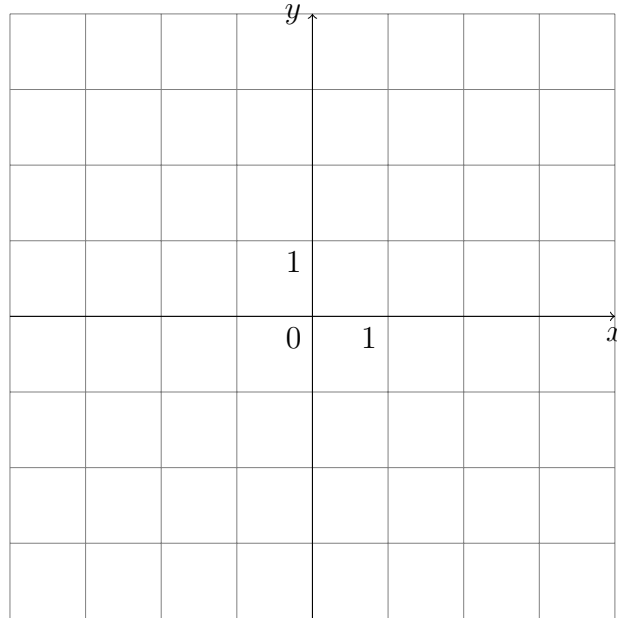
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$													



Ответ:

c. Рассмотрим функцию $h(x) = 2f(x)$; Чему равно $h(0)$? $h(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $h(x)$?

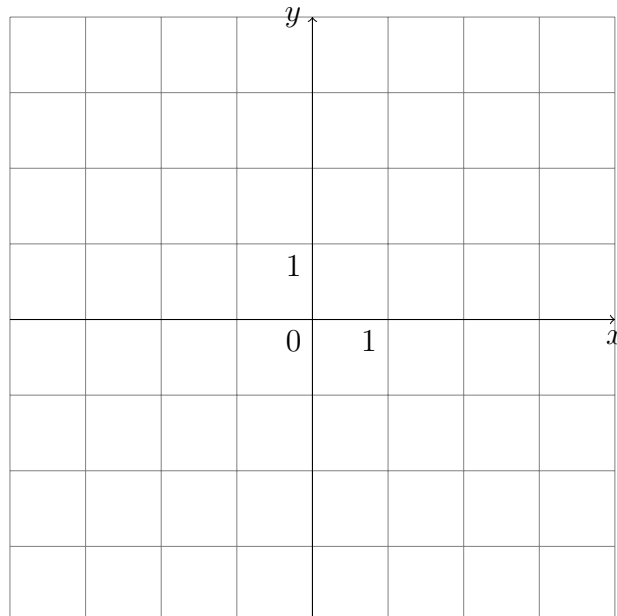
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

d. Рассмотрим функцию $u(x) = f(x + 1)$; Чему равно $u(0)$? $u(-1)$? $u(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $u(x)$?

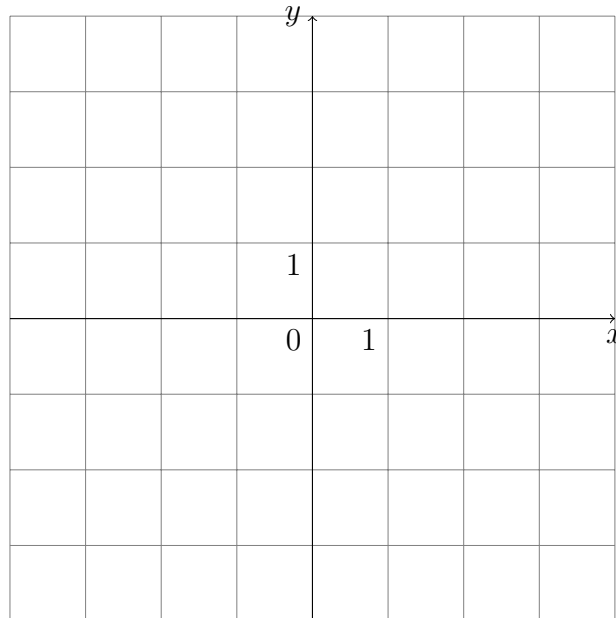
x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$u(x)$													



Ответ:

е. Рассмотрим функцию $v(x) = f(2x)$; Чему равно $v(0)$? $v(1)$? $v(0,5)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $v(x)$?

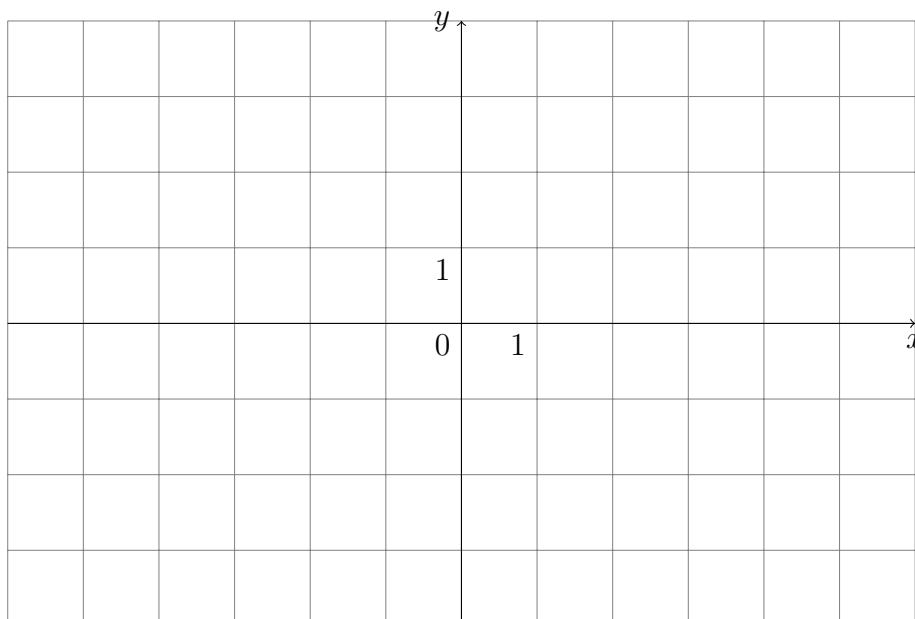
x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$v(x)$							



Ответ:

ф. Рассмотрим функцию $z(x) = f(x/2)$; Чему равно $z(0)$? $z(1)$? $z(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $z(x)$?

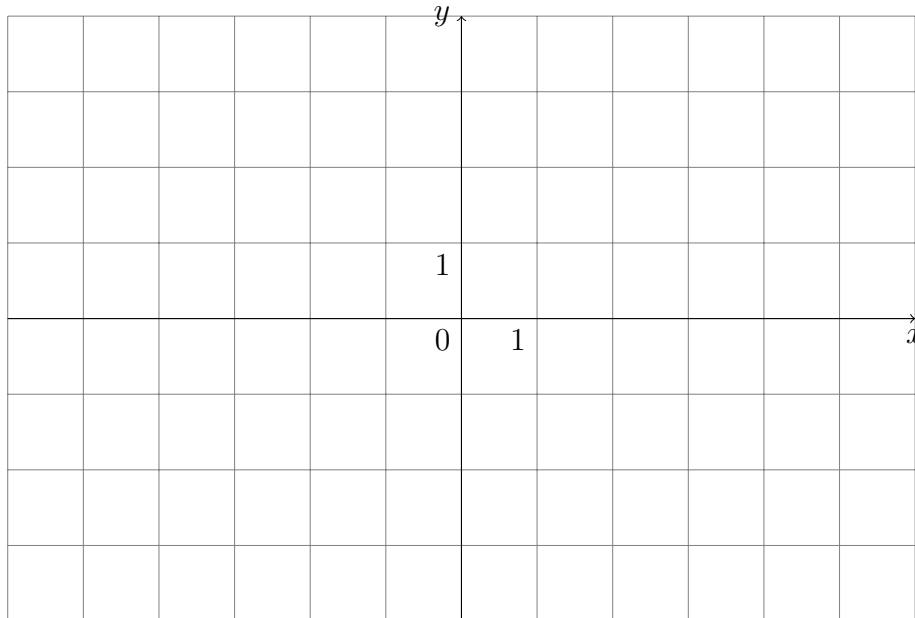
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$z(x)$													



Ответ:

g. Рассмотрим функцию $m(x) = |f(x)|$; Чему равно $m(0)$? $m(1)$? $m(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $m(x)$?

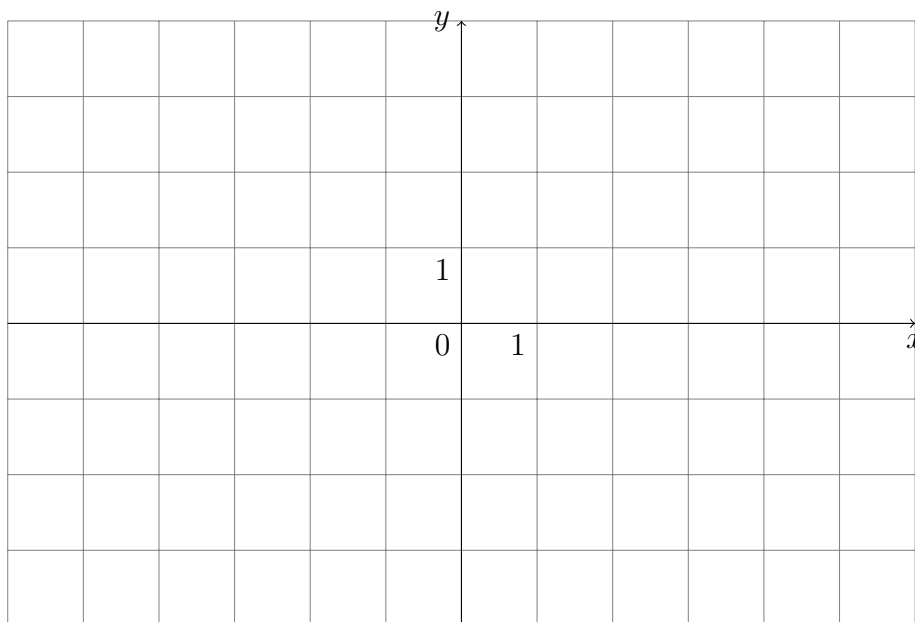
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

h. Рассмотрим функцию $r(x) = f(|x|)$; Чему равно $r(0)$? $r(1)$? $r(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $r(x)$?

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

Задача 2. (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

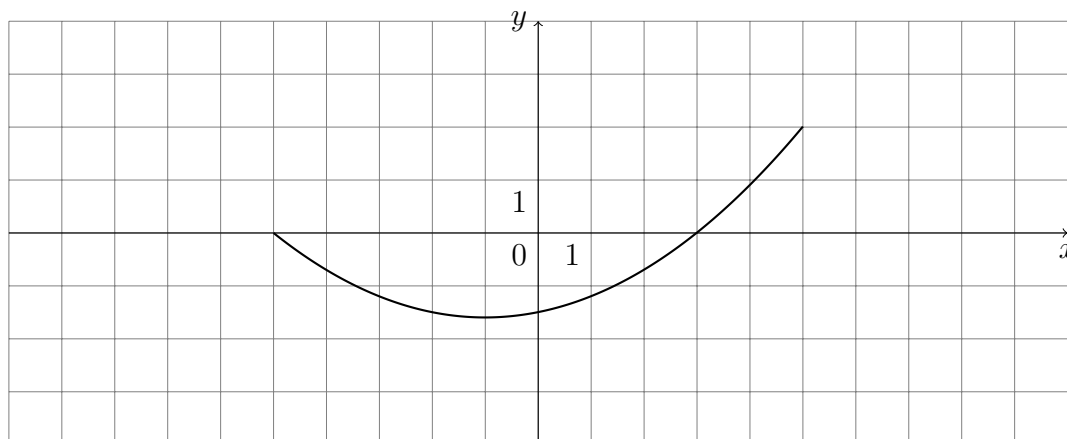


Рис. 2: Рисунок к задаче 2

- Найти область определения функции $g(x)$.
- Найти значение функции $g(x)$ в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
- Построить график $g(x)$.
- Описать словами, что надо сделать с графиком функции $f(x)$, чтобы получить график функции $g(x)$. Какие точки при этом преобразовании остаются на месте?

Решение:

Задача 3. (10 баллов) Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки $x = 3$. Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5 \quad (1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -5 \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -5 \right) \quad (2)$$

Докажите, пользуясь определением пределов по Коши, что утверждения (1) и (2) эквивалентны. Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

Задача 4. (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками ∞ , $+\infty$ и $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

Задача 5. (18 баллов) Угадать предел функции и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции (по Коши, с эпсилонками и дельтами). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3$;

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+6}{x+8}$.

Задача 6. (15 баллов) Вычислите предел функции или докажите, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можно пользоваться всеми фактами о пределах, которые обсуждались на лекциях или были включены в семинарские листочки в виде утверждений или задач. Если пользуетесь каким-то утверждением, давайте на него ссылку.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \\ x^2 + 4x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2^n}{n^3 + 1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^5 + 3^{-x}}$.

Задача 7. (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = +\infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

Задача 8. (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(e^{7x} + 1)^6 + 1}$$

Задача 9. (10 + 10 баллов). Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

а. $f(x) = \exp \frac{1}{(x+1)(x+7)^2}$.

б. $f(x) = \frac{-9x^5 + 2^{-x}}{x^4 + 5 \cdot 4^{-x}}$.