Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №3
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Барганов Максим Сергеевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF.

Задачи

Задача 1. (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$.

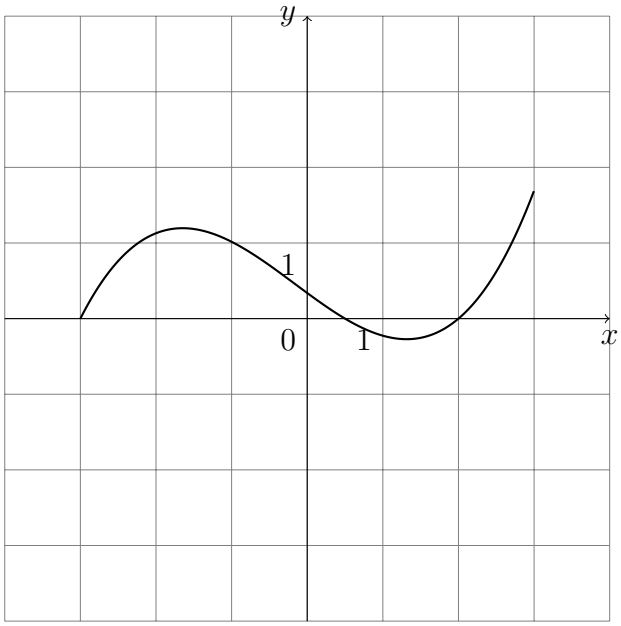


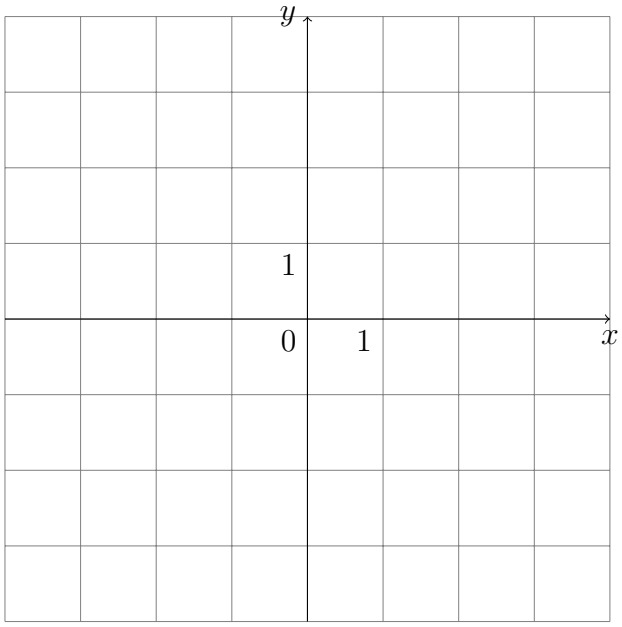
Рис. 1: Рисунок к задаче 1

a. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$													

b. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 1$. Чему равно $g(0)$? $g(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $g(x)$ и $f(x)$?

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$g(x)$													

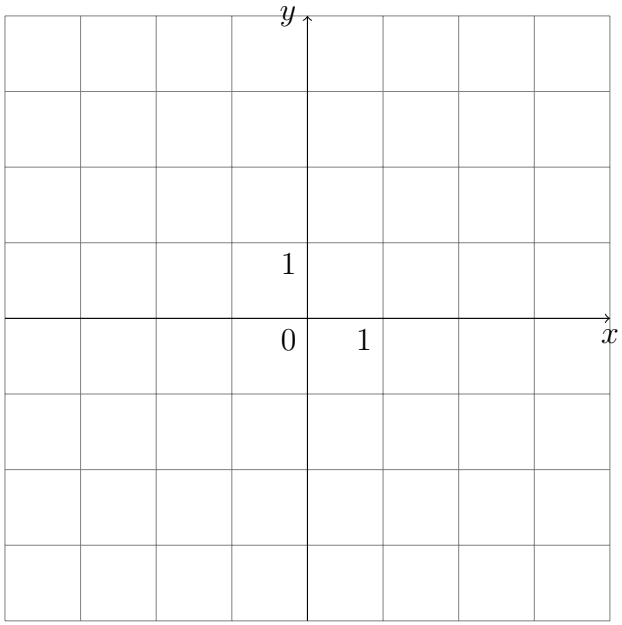


Ответ:

 Фамилия и имя студента: Барганов Максим Сергеевич

c. Рассмотрим функцию $h(x) = 2f(x)$; Чему равно $h(0)$? $h(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $h(x)$?

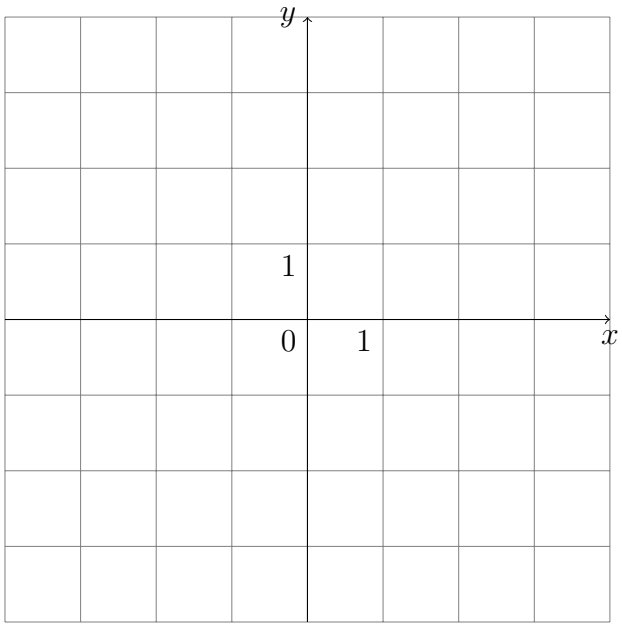
x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$h(x)$													



Ответ:

d. Рассмотрим функцию $u(x) = f(x+1)$; Чему равно $u(0)$? $u(-1)$? $u(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $u(x)$?

x	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$u(x)$													

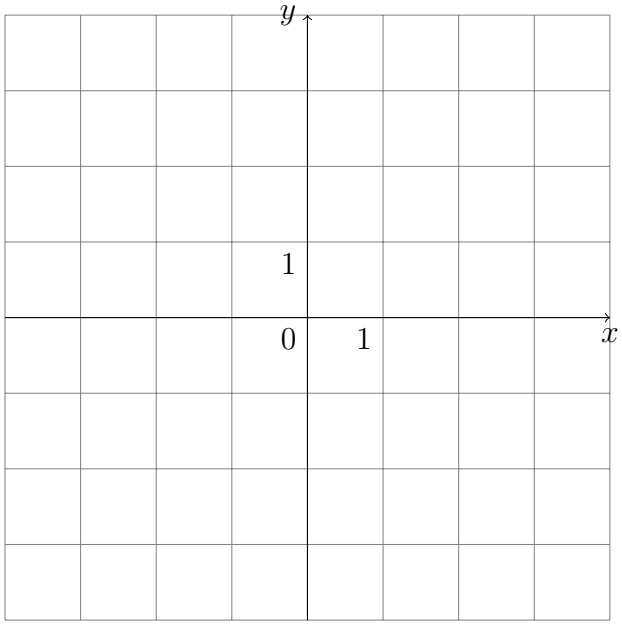


Ответ:

 Фамилия и имя студента: Барганов Максим Сергеевич

e. Рассмотрим функцию $v(x) = f(2x)$; Чему равно $v(0)$? $v(1)$? $v(0{,}5)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $v(x)$?

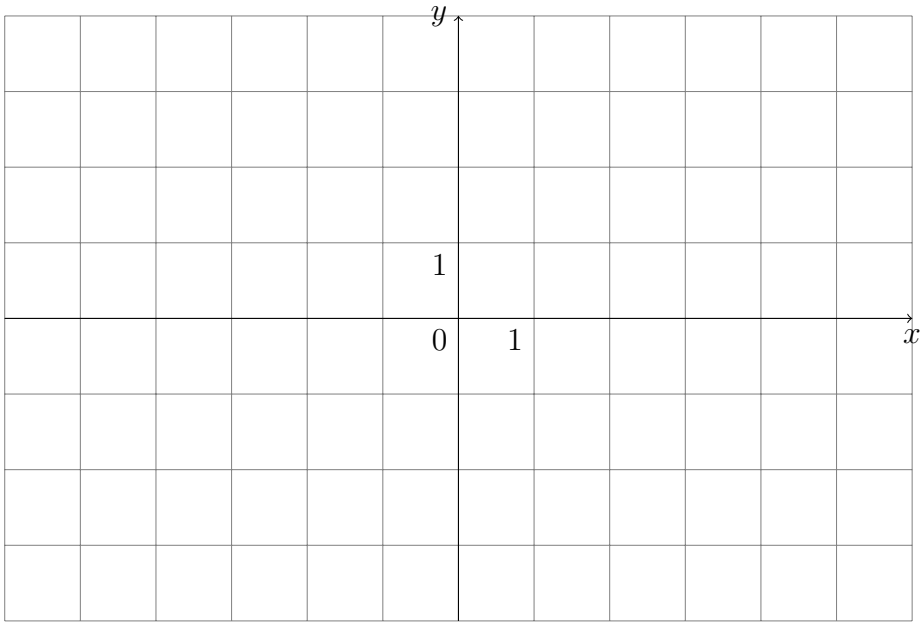
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$v(x)$							



Ответ:

f. Рассмотрим функцию $z(x) = f(x/2)$; Чему равно $z(0)$? $z(1)$? $z(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $z(x)$?

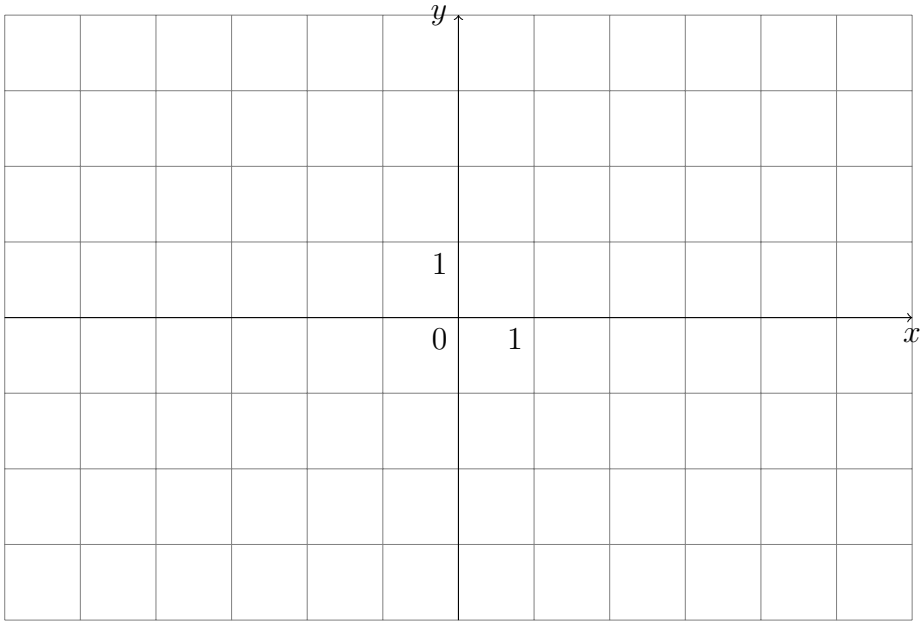
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$z(x)$													



Ответ:

g. Рассмотрим функцию $m(x) = |f(x)|$; Чему равно $m(0)$? $m(1)$? $m(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $m(x)$?

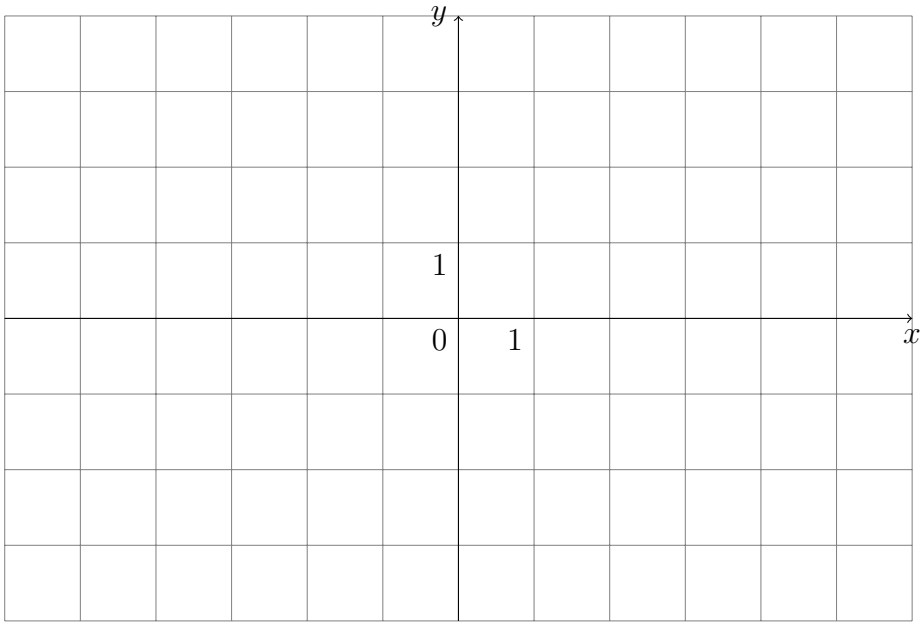
x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$h(x)$													



Ответ:

h. Рассмотрим функцию $r(x) = f(|x|)$; Чему равно $r(0)$? $r(1)$? $r(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $r(x)$?

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$h(x)$													



Ответ:

 Фамилия и имя студента: Барганов Максим Сергеевич

Задача 2. (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(\frac{x}{2} - \frac{3}{2})$.

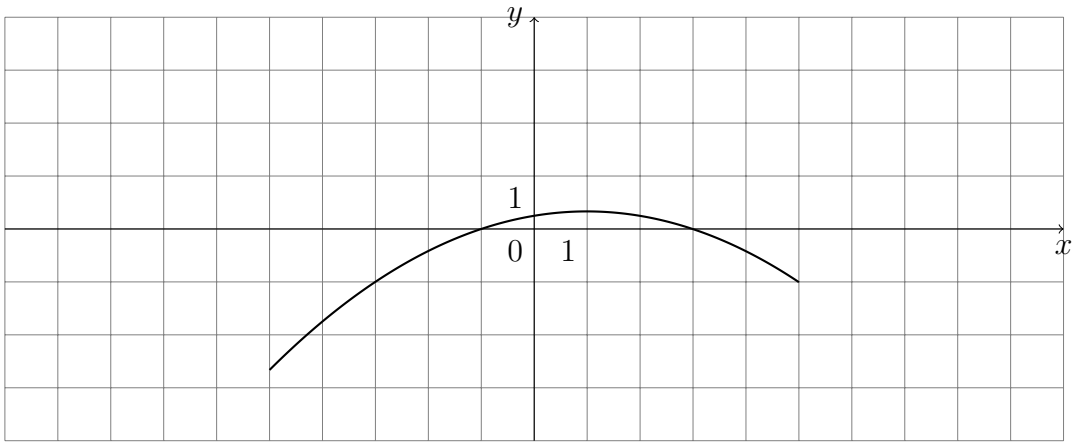


Рис. 2: Рисунок к задаче 2

a. Найти область определения функции $g(x)$.
b. Найти значение функции $g(x)$ в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
c. Построить график $g(x)$.
d. Описать словами, что надо сделать с графиком функции $f(x)$, чтобы получить график функции $g(x)$. Какие точки при этом преобразовании остаются на месте?

Решение:

Задача 3. (10 баллов) Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки $x = -1$. Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 \tag{1}$$

$$\left(\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1\right) \wedge \left(\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1\right) \tag{2}$$

Докажите, пользуясь определением пределов по Коши, что утверждения (1) и (2) эквивалентны. Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

Задача 4. (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками ∞, $+\infty$ и $-\infty$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

Задача 5. (18 баллов) Угадать предел функции и доказать, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции (по Коши, с эпсилонами и дельтами). Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности) — доказать это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

a. $\lim\limits_{x\to 3} x^3$;

b. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x+2}$.

Задача 6. (15 баллов) Вычислите предел функции или докажите, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можно пользоваться всеми фактами о пределах, которые обсуждались на лекциях или были включены в семинарские листочки в виде утверждений или задач. Если пользуетесь каким-то утверждением, давайте на него ссылку.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2^n}{n^3+1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1}(n^3 + 3n\cos n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$.

Задача 7. (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = +\infty,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

Задача 8. (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(e^{2x}+1\right)^6 + 1}$$

Задача 9. (10 + 10 баллов). Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x, при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, разрыв второго рода). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Можно пользоваться всеми фактами, которые доказывались на лекциях или были включены в семинарские листочки в качестве задач.

a. $f(x) = \exp \dfrac{1}{(x-5)(x-4)^2}$.

b. $f(x) = \dfrac{-4x^5 + 3^{-x}}{x^4 + 3 \cdot 7^{-x}}$.

 Фамилия и имя студента: Барганов Максим Сергеевич