Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020—21 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №2
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Львов Илья Русланович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Лемма 1. Если существует такое C, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любых $n > N$, $|a_n - a| < C\varepsilon$, то
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Задача 1. (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 2 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{6n^8+4}}{4n^4-2}$;
b. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-3} \cdot (-1{,}8)^n$.
c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1{,}3^n}{n!}$.
d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(n^2+2n\right)}{n}$.
e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{(-1)^{n^3}\pi}{4}\right)$.

Задача 2. (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4n-8}-\sqrt{n^2+8n+7})$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{6n^2+5n+3}-\sqrt{6n^2+5n+8})$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+3^{-n}}{-5^n+6^{-4n}}$;

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n+3^{-5n}}{-10^n+6^{-3n}}$;

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+7n-2}}{-2n-3}$;

f. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-3n-9}}{-6n^2+4n+4}$;

g. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-9}{3n^2-3n+6}$;

h. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=0}^{k}a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-3}a_{j+3}^3 n^{j+3}}, \quad k>4.$

Задача 3. (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа $x\in\mathbb{R}$ найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен x)? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться ∞, $+\infty$, $-\infty$? Обязательно ли он равняется ∞, $+\infty$, $-\infty$? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

a. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n)$.

b. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

c. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, где $a<0$, и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$.

d. Пусть известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, где $0>a>-1$, и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, причем для всех натуральных n, $b_n\in\mathbb{Z}$. Исследовать предел $\lim\limits_{n\to\infty}({a_n}^{b_n})$.

Следующие две задачи очень похожи. Задача 5 на наш взгляд несколько сложнее, чем 4. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

Задача 4. (20 баллов) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1}=\frac{bx_n}{a+x_n}.$$

Пусть $x_1>0$ и

a. $a=9$, $b=6$;

b. $a = 6$, $b = 9$.

Докажите, что предел последовательности $\{x_n\}$ существует и найдите его.

Подсказка: Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остаётся доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях x_1 последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

Задача 5. (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 3 + \frac{1}{3 + x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

Подсказка: последовательность $\{x_n\}$ немонотонна. Рассмотрите последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$. Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел $\{x_n\}$ также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.