

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020—21 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №2

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Карасев Дмитрий Алексеевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в ту.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Лемма 1.** Если существует такое  $C$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что для любых  $n > N$ ,  $|a_n - a| < C\varepsilon$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

**Задача 1.** (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 2 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^9 + 3}}{4n^2 - 3}$ ;

b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{6^n}$ .

c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1,2^n}{n!}$ .

d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^4 + 4n)}{n}$ .

e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{(-1)^{n^6} \pi}{4}\right)$ .

**Задача 2.** (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{8n^2 - 7n - 7} - \sqrt{8n^2 + 7n + 6});$

b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 9n - 7} - \sqrt{3n^2 + 9n - 4});$

c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2^n + 3^{-n}}{-2^n + 8^{-5n}};$

d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 6^{-n}}{8^n + 7^{-2n}};$

e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 9n + 6}}{-5n - 7};$

f.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 4n - 9}}{3n^2 - 3n - 7};$

g.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 7n - 1}{8n^2 - 2n - 5};$

h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-3} a_{j+3}^5 n^{j+3}}, \quad k > 4.$

**Задача 3.** (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен  $x$ )? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ? Обязательно ли он равняется  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

a. Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ .

b. Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ .

c. Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , где  $a < 0$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ .

d. Пусть известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , где  $0 > a > -1$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , причем для всех натуральных  $n$ ,  $b_n \in \mathbb{Z}$ . Исследовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n})$ .

Следующие две задачи очень похожи. Задача 5 на наш взгляд несколько сложнее, чем 4. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

**Задача 4.** (20 баллов) Последовательность  $\{x_n\}$  задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{a + x_n}.$$

Пусть  $x_1 > 0$  и

a.  $a = 7, b = 5;$

в.  $a = 5, b = 7$ .

Докажите, что предел последовательности  $\{x_n\}$  существует и найдите его.

**Подсказка:** Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ , чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остаётся доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях  $x_1$  последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

**Задача 5.** (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 5 + \frac{1}{5 + x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

**Подсказка:** последовательность  $\{x_n\}$  немонотонна. Рассмотрите последовательности  $\{x_{2n}\}$  и  $\{x_{2n+1}\}$ . Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел  $\{x_n\}$  также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.