

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020—21 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №2

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Афанасьев Егор Максимович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Лемма 1. Если существует такое C , что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любых $n > N$, $|a_n - a| < C\varepsilon$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Задача 1. (25 баллов) Найти пределы последовательностей с помощью определения. Если предела не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), тоже докажите. В некоторых пунктах вам будет полезно вспомнить решение задачи 2 из семинара №5. Во всех пунктах нужно явно использовать определение, ссылаться на арифметику пределов, какие-либо теоремы о пределах, решения задач с семинаров нельзя. Но можно использовать лемму 1. Логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^3 + 4}}{5n^2 - 2}$;

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{6^n}$.

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1,2^n}{n!}$.

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^3 + 3n)}{n}$.

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{(-1)^{n^4} \pi}{4}\right)$.

Задача 2. (32 балла) Найдите следующие пределы. Можно пользоваться арифметикой пределов, теоремой о двух милиционерах и другими фактами, доказанными на лекциях или включенными в семинарские листочки в виде задач.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{7n^2 - 2n + 4} + \sqrt{7n^2 + 3n + 6});$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{7n^2 - 3n - 1} + \sqrt{7n^2 - 3n + 8});$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4^n + 4^{-2n}}{4^n + 7^{-5n}};$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9^n + 5^{-4n}}{13^n + 6^{-n}};$

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 7n - 1}}{8n - 2};$

f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 6n + 1}}{8n^2 - 8n + 2};$

g. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 3}{-4n^2 - 2n - 8};$

h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{j=0}^{k-3} a_{j+3}^8 n^{j+2}}, \quad k > 4.$

Задача 3. (20 баллов)

В этой задаче слова «исследовать предел» означают, что вам необходимо ответить на вопрос, чему может и чему не может равняться указанный предел. Может ли он равняться произвольному числу (то есть верно ли, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ найдутся такие последовательности, удовлетворяющие условию, что исследуемый предел существует и равен x)? Обязательно ли он равен какому-то конкретному числу? Может ли он равняться ∞ , $+\infty$, $-\infty$? Обязательно ли он равняется ∞ , $+\infty$, $-\infty$? Во всех случаях необходимо привести соответствующие доказательства. При необходимости можно пользоваться арифметикой пределов (хотя для большинства пунктов она бесполезна, поскольку имеет дело только с конечными пределами) и теоремой о двух милиционерах.

a. Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$.

b. Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.

c. Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, где $a > 0$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

d. Пусть известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, где $a > 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, причем для всех натуральных n , $b_n \in \mathbb{Z}$. Исследовать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n})$.

Следующие две задачи очень похожи. Задача 5 на наш взгляд несколько сложнее, чем 4. Вы можете выбрать одну из них и решить только её, либо решить обе. В последнем случае будет засчитано максимум 20 баллов (за обе задачи в сумме).

Задача 4. (20 баллов) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{a + x_n}.$$

Пусть $x_1 > 0$ и

a. $a = 8$, $b = 7$;

в. $a = 7, b = 8$.

Докажите, что предел последовательности $\{x_n\}$ существует и найдите его.

Подсказка: Предположим, что предел существует. Воспользуйтесь арифметикой пределов и тем фактом, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$, чтобы получить уравнение на значение предела. Решив уравнение, найдите, чему предел может равняться, если существует. Остаётся доказать, что он действительно существует, и какой из возможных вариантов реализуется. Для этого изучите, при каких значениях x_1 последовательность возрастает или убывает. Докажите её ограниченность с правильной стороны. Используйте теорему Вейерштрасса, чтобы доказать существование предела.

Задача 5. (20 баллов) Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 4 + \frac{1}{4 + x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что её предел существует, и найдите его.

Подсказка: последовательность $\{x_n\}$ немонотонна. Рассмотрите последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$. Докажите, что если их пределы существуют и совпадают, то предел $\{x_n\}$ также существует и равен им. Затем используйте подсказку к предыдущей задаче, чтобы доказать, что обе последовательности имеют предел, и найти его.