Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №1
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Дзахоев Георгий Маратович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, с ясно написанными рассуждениями, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, неразборчивое фото работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Аккуратно написанная от руки работа и аккуратно отсканированная не получает штрафов или бонусов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Style guide. Пожалуйста, пишите подробные доказательства всех утверждений со всеми необходимыми выкладками, логическими переходами и т.д. Решения должны представлять собой текст, который можно прочитать и понять, а не просто последовательность формул.

Задачи

Задача 1. (20 баллов.) Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную следующим образом:

$$a_0 = 2,\ a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 6a_{n-1} + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Докажите по индукции, что для любого натурального n, $a_n = (-2)^n + 3^n$.

Задача 2. (10 баллов за каждый пункт.) Для последовательности $\{a_n\}$ сформулируйте утверждения с помощью кванторов. (Можно сформулировать любое утверждение, эквивалентное данному.) Разрешено использовать кванторы, числа, операции сравнения (больше, меньше, больше или равно, меньше или равно, равно, не равно), проверки принадлежности или непринадлежности элемента множествам натуральных, рациональных и вещественных чисел. Знак отрицания использовать нельзя. Условия после кванторов использовать можно. Для каждого утверждения приведите пример последовательности, которая ему удовлетворяет, и пример последовательности, которая ему не удовлетворяет.

a. Все члены, кроме конечного их числа, не больше -5.
b. Лишь конечное число членов не меньше -2.
c. Бесконечно много членов рациональны.
d. Хотя бы один член меньше 3.
e. Все члены, начиная с некоторого, больше -2.

Задача 3. (10 баллов за каждый пункт.) Верны ли утверждения? (a и x — вещественные числа.) Привести необходимые доказательства.
a. $\exists a\ \forall x\colon (x > 3) \Rightarrow (4x^2 + ax \leqslant 0)$;
b. $\forall a\ \exists x\colon (x > 3) \Rightarrow (4x^2 + ax \leqslant 0)$;
c. $\forall a\ \exists x\colon (x > 3) \wedge (4x^2 + ax \leqslant 0)$;
d. $\forall x\ \exists a\colon (x > 3) \Rightarrow (4x^2 + ax \leqslant 0)$.

Задача 4. (10 баллов за каждый пункт.) Верно ли следующее утверждение для последовательности $\{x_n\}$,

$$x_n = \frac{3n^2+2}{3n^2}.$$

Докажите, не пользуясь никакими теоремами о пределах.
a. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N: \quad |x_n - 1| < \varepsilon$;
b. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \quad |x_n - 1| < \varepsilon$;
c. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \quad |x_n - 1| < \varepsilon$;
d. $\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \quad |x_n| > C$;
e. $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| < C$?

Задача 5. (15 баллов за каждый пункт.) Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, определенную следующим образом: первые 3 элемента $\{c_n\}$ это первые 3 элемента $\{a_n\}$, следующие 5 элементов $\{c_n\}$ это первые 5 элементов $\{b_n\}$, следующие 3 элемента $\{c_n\}$ это следующие 3 элемента $\{a_n\}$ (начиная с a_4), следующие 5 элементов $\{c_n\}$ это следующие 5 элементов $\{b_n\}$ (начиная с b_6) и так далее, процесс продолжается периодически, на каждом шаге из $\{a_n\}$ берутся очередные 3 элемента, а из $\{b_n\}$ очередные 5 элементов. Начало последовательности $\{c_n\}$ имеет вид:

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, a_4, a_5, a_6, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, \ldots$$

Пользуясь определением предела, докажите, что
a. если пределы последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ существуют и совпадают (обозначим их за A), то предел последовательности $\{c_n\}$ также существует и равен A;
b. если пределы последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ существуют и не совпадают, то предел $\{c_n\}$ не существует,
c. если предел хотя бы одной из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ не существует, то предел $\{c_n\}$ также не существует.

Пользоваться какими-либо теоремами о пределах нельзя, только определением.

 Фамилия и имя студента: Дзахоев Георгий Маратович