

ФИО: _____.

Правила

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ!

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Пользуясь только определением предела по Коши и алгебраическими преобразованиями, найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (3x^2 + 4x).$$

Задача 2. (5 баллов) Найти значение выражения (представить его в виде $x + iy$, где x и y — вещественные числа, а i — мнимая единица; в ответе в выражениях для x и y могут использоваться обычные арифметические операции, включая возведение в целочисленную степень):

$$(i - 1)^{2020}.$$

Ответ:

Задача 3. (10 баллов) Найти все первые частные производные функции

$$f(x, y) = xe^{2\cos(xy)-5}.$$

Ответ:

Задача 4. (15 баллов) Пользуясь любыми утверждениями, доказанными на лекциях, а также сформулированными в семинарских листочках (в т.ч. в виде задач), найдите предел.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{\frac{2}{x}} - x^2 - 2x \right).$$

Задача 5. (15 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2 - 1}.$$

Найти её естественную область определения, промежутки непрерывности, точки разрывов, асимптоты всех типов, промежутки возрастания и убывания, точки экстремумов, корни. Построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, указать их x - и y -координаты, отметить корни, построить асимптоты.

Задача 6. (22 балла) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(\int_{-1}^{x-1} e^{-t^2-2t} dt \right) - x.$$

Найти её естественную область определения, промежутки непрерывности, точки разрывов, асимптоты всех типов (для наклонных асимптот найти только угловой коэффициент), промежутки возрастания и убывания, точки экстремумов (только x -координаты) и хотя бы один корень. Построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, указать их x -координаты (y -координаты можно не находить). Найти промежутки выпуклости и точки перегиба, отметить их на графике. Доказать, что у функции есть ровно три различных корня.

Задача 7. (15+15 баллов) Найти интеграл. Если он несобственный, исследовать его сходимость: если расходится, доказать, если сходится, найти его значение.

а. $\int_0^4 \max(x^2, 4x - 3) dx.$

Ответ:

б. $\int_0^2 \ln^2 |2t - 2| dt.$

Ответ:

Задача 8. (15 + 5 баллов) Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, $b_n = (n + 7)^\alpha - n^\alpha$, где $\alpha \geq 0$ — вещественный параметр.

а. Найти значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ в зависимости от α .

Ответ:

б. Найти все значения α , при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ответ:

Задача 9. (10+10 баллов) Пусть известно, что функция f всюду дифференцируема и $f(x) = O(x^4)$ при $x \rightarrow +\infty$. Верно ли утверждение? Ответ обосновать.

а. $f'(x) = O(x^3)$.

Ответ:

б. $\int_0^x f(t) dt = O(x^5)$.

Ответ: