ФИО: ____.

Правила

Строго запрещено:
- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (кроме своего собственного, написанного от руки листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Пожалуйста, пишите подробные решения и явно указывайте, где находится ответ! Ответ не обязательно доводить до числа — можно оставить его в виде выражения, содержащего арифметические операции и элементарные функции.

Желаем удачи!

Задача 1. (12 баллов) Рассмотрим функцию f, определённую на отрезке $[-5, -3]$ и заданную на нём формулой

$$f(x) = x^4.$$

Пусть g — обратная функция к функции f.

a. Задайте функцию g формулой. Укажите её область определения и область значений.

b. Постройте график g.

c. Надите уравнение касательной к графику g в точке $x = -4$ и постройте эту касательную на графике.

Задача 2. (15 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = xe^{-2x^2}.$$

Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов, найти односторонние пределы вблизи разрывов. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

Задача 3. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^5 \ln(3x).$$

Найти односторонний предел функции в точке $x = 0$, доопределить функцию в этой точке по непрерывности, то есть рассмотреть функцию $\tilde{f}$, которая совпадает с f во всех точках, кроме $x = 0$, а в $x = 0$ принимает такое значение, что $\tilde{f}$ односторонне непрерывна в этой точке. Имеет ли функция $\tilde{f}$ одностороною производную в точке $x = 0$? Если да, найти её. Найти односторонний предел производной $\tilde{f}$ при $x \to 0^+$. Провести полное исследование $\tilde{f}$ как в задаче 2, построить её график.

Задача 4. (40 баллов) Найти интеграл.

a. $\int_{-2}^{4} (4x+8)^8 \, dx$

b. $\int_{0}^{3} x^5 \ln(3x) \, dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\cos(\sin(x))\,dx$

d. $\int_7^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}$

Задача 5. (10 баллов) Сходится ли ряд? Ответ обосновать.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{\frac{7}{5}} + n}$$

Задача 6. (15 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{7x}) - \sqrt[3]{7x}.$$

Дифференцируема ли она в точке $x = 0$? Если да, найти её производную в этой точке.

Задача 7. (20 баллов) Пусть функция f дифференцируема в точке $x = 4$ и $f(4) = 1$. Пусть также функция $g(x) = |f(x) - 1|$ дифференцируема в точке $x = 4$. Найти $f'(4)$ и $g'(4)$.

Задача 8. (15 баллов) Про функцию f известно, что она 8 раз дифференцируема в точке $x = x_0$ и

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x_0) &= 0,\\
f^{(2)}(x_0) &= 0,\\
f^{(3)}(x_0) &= 0,\\
f^{(4)}(x_0) &= 0,\\
f^{(5)}(x_0) &= 0,\\
f^{(6)}(x_0) &= 0,\\
f^{(7)}(x_0) &= 0,\\
f^{(8)}(x_0) &= 1,
\end{aligned}
$$

где $f^{(i)}$ — i-я производная функции f. Может ли точка x_0 быть точкой максимума функции f? Точкой минимума? Не быть ни тем, ни другим? Ответ обосновать.